

Antilles Guyane. Septembre 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (3 points) (commun à tous les candidats)

Soit la suite de nombres complexes (z_n) définie par

$$\begin{cases} z_0 = 100 \\ z_{n+1} = \frac{i}{3}z_n \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

Pour tout entier naturel n , on note M_n le point d'affixe z_n .

- 1) Démontrer que, pour tout entier naturel n , les points O , M_n et M_{n+2} sont alignés.
- 2) On rappelle qu'un disque de centre A et de rayon r , où r est un nombre réel positif, est l'ensemble des points M du plan tels que $AM \leq r$.
Démontrer que, à partir d'un certain rang, tous les points M_n appartiennent au disque de centre O et de rayon 1.

EXERCICE 2 : corrigé

1) Soit n un entier naturel.

$$z_{\overrightarrow{OM_{n+2}}} = z_{n+2} = \frac{i}{3}z_{n+1} = \left(\frac{i}{3}\right)^2 z_n = -\frac{1}{9}z_n = -\frac{1}{9}z_{\overrightarrow{OM_n}}.$$

Mais alors,

$$\overrightarrow{OM_{n+2}} = -\frac{1}{9}\overrightarrow{OM_n}.$$

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{OM_n}$ et $\overrightarrow{OM_{n+2}}$ sont colinéaires et donc les points O , M_n et M_{n+2} sont alignés.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. $OM_{n+1} = |z_{n+1}| = \left|\frac{i}{3}z_n\right| = \frac{|i|}{3}|z_n| = \frac{1}{3}OM_n$. Donc, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (OM_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme $u_0 = OM_0 = |z_0| = 100$ et de raison $q = \frac{1}{3}$. On en déduit que pour tout entier naturel n ,

$$OM_n = OM_0 \times q^n = 100 \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{100}{3^n}.$$

Puisque $-1 < \frac{1}{3} < 1$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} OM_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 100 \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$. En particulier, il existe un rang n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, $OM_n \leq 1$.

n_0 est un rang à partir duquel tous les points M_n appartiennent au disque de centre O et de rayon 1.

Déterminons explicitement un tel rang. Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} OM_n \leq 1 &\Leftrightarrow \frac{100}{3^n} \leq 1 \Leftrightarrow 100 \leq 3^n \Leftrightarrow 3^n \geq 100 \\ &\Leftrightarrow n \geq 5, \end{aligned}$$

car $3^4 < 100$, $3^5 \geq 100$ et car la suite $(3^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

A partir du rang $n_0 = 5$, tous les points M_n appartiennent au disque de centre O et de rayon 1.