

Pondichéry 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 5 (5 points) (commun à tous les candidats)

On considère un cube $ABCDEFGH$ fourni en annexe page 9/9.

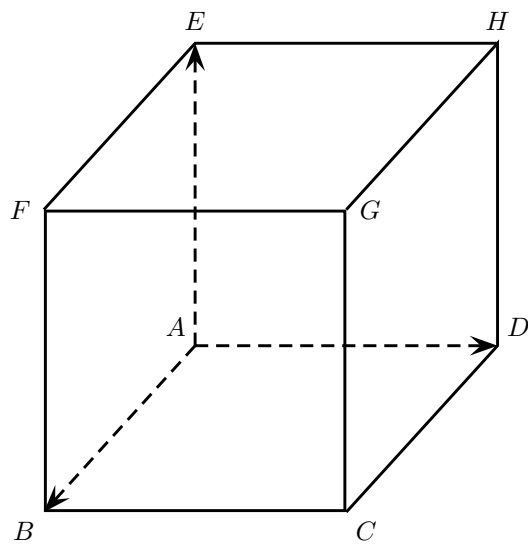
L'espace est rapporté au repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

On note \mathcal{P} le plan d'équation $x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z - 1 = 0$.

Construire, sur la figure fournie en annexe, la section du cube par le plan \mathcal{P} .

La construction devra être justifiée par des calculs ou des arguments géométriques.

EXERCICE 5



Pondichéry 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 5 : corrigé

Le plan \mathcal{P} n'est parallèle à aucune des faces du cube car un vecteur normal à \mathcal{P} est le vecteur $\vec{n} \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right)$ qui n'est orthogonal à aucun des vecteurs \vec{AB} , \vec{AD} ou \vec{AE} .

1 ère solution. (on obtient les coordonnées exactes des différents sommets de la section)

• **Intersection de \mathcal{P} avec (AB) .** Les points de (AB) sont les points de coordonnées $(\lambda, 0, 0)$. Un tel point appartient à \mathcal{P} si et seulement si $\lambda = 1$. Donc, $\mathcal{P} \cap (AB) = \{B\}$.

• **Intersection de \mathcal{P} avec (EF) .** Le point E a pour coordonnées $(0, 0, 1)$ et le point F a pour coordonnées $(1, 0, 1)$. Le vecteur \vec{EF} a pour coordonnées $(1, 0, 0)$. La droite (EF) admet pour représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$
 Soit $M(\lambda, 0, 1)$ un point de (EF) . $M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \lambda + \frac{1}{3} - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{3}$. Donc $\mathcal{P} \cap (EF) = \{I\}$ où $I \left(\frac{2}{3}, 0, 1 \right)$.

Mais alors, la section de la face $ABFE$ par le plan \mathcal{P} est le segment $[BI]$.

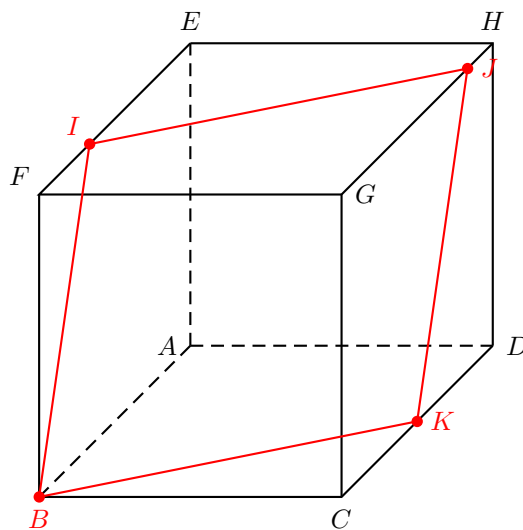
• **Intersection de \mathcal{P} avec (GH) .** Le point G a pour coordonnées $(1, 1, 1)$ et le point H a pour coordonnées $(0, 1, 1)$. Le vecteur \vec{GH} a pour coordonnées $(-1, 0, 0)$. La droite (GH) admet pour représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$
 Soit $M(1 - \lambda, 1, 1)$ un point de (GH) . $M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow (1 - \lambda)\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{5}{6}$. Donc $\mathcal{P} \cap (GH) = \{J\}$ où $J \left(\frac{1}{6}, 1, 1 \right)$.

La section de la face $EFGH$ par le plan \mathcal{P} est le segment $[IJ]$.

• **Intersection de \mathcal{P} avec (CD) .** Le point D a pour coordonnées $(0, 1, 0)$ et le point C a pour coordonnées $(1, 1, 0)$. Le vecteur \vec{DC} a pour coordonnées $(1, 0, 0)$. La droite (DC) admet pour représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$
 Soit $M(\lambda, 1, 0)$ un point de (GH) . $M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \lambda + \frac{1}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$. Donc $\mathcal{P} \cap (DC) = \{K\}$ où $K \left(\frac{1}{2}, 1, 0 \right)$.

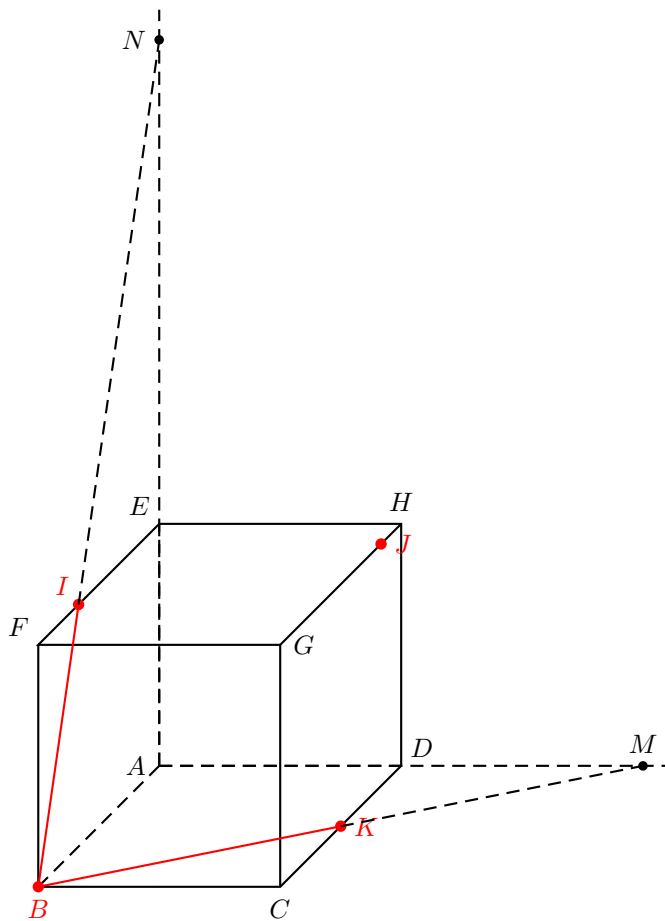
La section de la face $GHCD$ par le plan \mathcal{P} est le segment $[JK]$ puis la section de la face $ABCD$ par le plan \mathcal{P} est le segment $[KB]$.

On peut alors tracer la section du cube par le plan \mathcal{P} .



2 ème solution. (On se contente de construire les sommets de la section en cherchant d'abord les intersections avec les axes qui sont bien plus simples à déterminer. C'est très certainement cette solution qui était attendue.)

Soit $M(x, y, z)$ un point du plan \mathcal{P} . Si $x = y = 0$, alors $z = 3$, si $x = z = 0$, alors $y = 2$ et si $y = z = 0$, alors $x = 1$. Les points d'intersection du plan \mathcal{P} avec les droites (AB) , (AD) et (AE) sont les points B , M et N de coordonnées respectives $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ et $(0, 0, 3)$. En traçant les droites (MB) et (NB) , on obtient la trace $[BK]$ du plan \mathcal{P} sur la face $ABCD$ et la trace $[BI]$ du plan \mathcal{P} sur la face $ABFE$.



La trace $[KJ]$ du plan \mathcal{P} sur la face $CDGH$ est alors obtenue en traçant la parallèle à (BI) passant par K et enfin la trace du plan \mathcal{P} sur la face $EFGH$ est le segment $[IJ]$.

