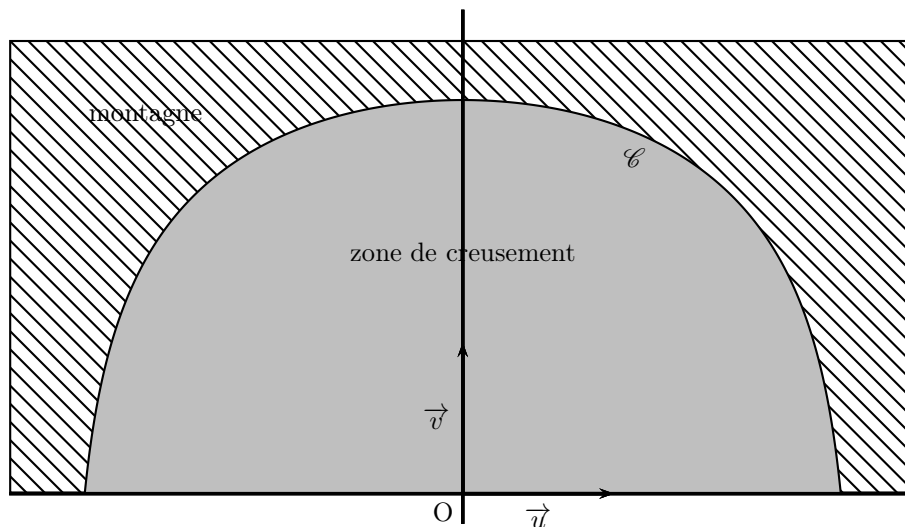


Pondichéry 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (4 points) (commun à tous les candidats)

Une entreprise spécialisée dans les travaux de construction a été mandatée pour percer un tunnel à flanc de montagne. Après étude géologique, l'entreprise représente dans le plan la situation de la façon suivante : dans un repère orthonormal, d'unité 2 m, la zone de creusement est la surface délimitée par l'axe des abscisses et la courbe \mathcal{C} .



On admet que \mathcal{C} est la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[-2, 5 ; 2, 5]$ par :

$$f(x) = \ln(-2x^2 + 13, 5).$$

L'objectif est de déterminer une valeur approchée, au mètre carré près, de l'aire de la zone de creusement.

Partie A : Étude de la fonction f

- 1) Calculer $f'(x)$ pour $x \in [-2, 5 ; 2, 5]$.
- 2) Dresser, en justifiant, le tableau de variation de la fonction f sur $[-2, 5 ; 2, 5]$.
En déduire le signe de f sur $[-2, 5 ; 2, 5]$.

Partie B : Aire de la zone de creusement

On admet que la courbe \mathcal{C} est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées du repère.

- 1) La courbe \mathcal{C} est-elle un arc de cercle de centre O ? Justifier la réponse.
- 2) Justifier que l'aire, en mètre carré, de la zone de creusement est $\mathcal{A} = 8 \int_0^{2,5} f(x) dx$.
- 3) L'algorithme, donné en annexe, permet de calculer une valeur approchée par défaut de $I = \int_0^{2,5} f(x) dx$, notée a .

On admet que : $a \leq I \leq a + \frac{f(0) - f(2,5)}{n} \times 2,5$.

- a) Le tableau fourni en annexe, donne différentes valeurs obtenues pour R et S lors de l'exécution de l'algorithme pour $n = 50$.
Compléter ce tableau en calculant les six valeurs manquantes.
- b) En déduire une valeur approchée, au mètre carré près, de l'aire de la zone de creusement.

EXERCICE 3

Variables	R et S sont des réels n et k sont des entiers		
Traitement	S prend la valeur 0 Demander la valeur de n Pour k variant de 1 à n faire <table border="1" style="margin-left: 20px; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 2px;">R prend la valeur $\frac{2,5}{n} \times f\left(\frac{2,5}{n} \times k\right)$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">S prend la valeur $S + R$</td> </tr> </table> Fin Pour Afficher S	R prend la valeur $\frac{2,5}{n} \times f\left(\frac{2,5}{n} \times k\right)$	S prend la valeur $S + R$
R prend la valeur $\frac{2,5}{n} \times f\left(\frac{2,5}{n} \times k\right)$			
S prend la valeur $S + R$			

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de R et de S , arrondies à 10^{-6} , obtenues lors de l'exécution de l'algorithme pour $n = 50$.

Initialisation	$S = 0, n = 50$			
Boucle Pour	Étape k	R	S	
	1	
	2	0,130 060	0,260 176	
	3	0,129 968	0,390 144	
	4	0,129 837	...	
	⋮		⋮	
	24	0,118 137	3,025 705	
	25	0,116 970	3,142 675	
	⋮		⋮	
	49	0,020 106	5,197 538	
	50	
	Affichage	$S = \dots$		

Pondichéry 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

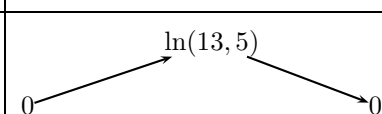
Partie A

1) Si $x \in [-2,5; 2,5]$, $0 \leq x^2 \leq 2,5^2$ ou encore $0 \leq x^2 \leq 6,25$ puis $-12,5 \leq -2x^2 \leq 0$ et enfin $1 \leq -2x^2 + 13,5 \leq 13,5$. En particulier, si $x \in [-2,5; 2,5]$, alors $-2x^2 + 13,5 > 0$.

f est de la forme $x \mapsto \ln(u(x))$ avec $u(x) = -2x^2 + 13,5$. D'après ce qui précède, pour tout x de $[-2,5; 2,5]$, $u(x) > 0$. Donc, f est dérivable sur $[-2,5; 2,5]$ et pour tout x de $[-2,5; 2,5]$,

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{-4x}{-2x^2 + 13,5}.$$

2) Pour $x \in [-2,5; 2,5]$, $-2x^2 + 13,5 > 0$. Donc, pour $x \in [-2,5; 2,5]$, $f'(x)$ est du signe de $-4x$ ou encore du signe de $-x$. Donc, la fonction f' est strictement positive sur $[-2,5; 0[$ et strictement négative sur $]0; 2,5]$ puis la fonction f est strictement croissante sur $[-2,5; 0]$ et strictement décroissante sur $[0; 2,5]$. De plus, $f(-2,5) = f(2,5) = \ln(-2 \times 2,5^2 + 13,5) = \ln(1) = 0$. On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-2,5$	0	$2,5$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f			

Puisque f est croissante sur $[-2,5; 0]$, si $-2,5 \leq x \leq 0$, alors $f(x) \geq f(-2,5)$ ou encore $f(x) \geq 0$. Ainsi, la fonction f est positive sur $[-2,5; 0]$. De même, la fonction f est positive sur $[0; 2,5]$ et finalement sur $[-2,5; 2,5]$.

Partie B

1) Soient A et B les points de la courbe \mathcal{C} d'abscisses respectives $2,5$ et 0 . A a donc pour coordonnées $(2,5; 0)$ et B a pour coordonnées $(0; \ln(13,5))$. Donc, $OA = 2,5$ et $OB = \ln(13,5)$ avec $\ln(13,5) = 2,6\dots$. On a $OA \neq OB$ et donc, la courbe \mathcal{C} n'est pas un arc de cercle de centre O .

2) On note \mathcal{D} l'ensemble des points du plan situés entre l'axe des abscisses et la courbe \mathcal{C} . Puisque la courbe \mathcal{C} est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, l'aire de \mathcal{D} , exprimée en unités d'aire est le double de celle de la partie de \mathcal{D} située à droite de l'axe (Oy) .

Puisque la fonction f est positive sur $[0; 2,5]$, cette aire exprimée en unités d'aire est égale à $2 \int_0^{2,5} f(x) dx$. Enfin, l'unité de longueur est de 2m et donc l'unité d'aire est égale à 4m^2 . Finalement, l'aire de \mathcal{D} , exprimée en m^2 , notée \mathcal{A} est

$$\mathcal{A} = 4 \times 2 \int_0^{2,5} f(x) dx = 8 \int_0^{2,5} f(x) dx.$$

3) a) Tableau complété

La case située ligne $k = 1$, colonne R, est $R = \frac{2,5}{50} f\left(\frac{2,5}{50}\right) = 0,130115$ puis en colonne S, $S = 0 + R = 0,130115$.

En ligne $k = 4$, la colonne R contient $\frac{2,5}{50} f\left(\frac{2,5}{50} \times 4\right) = 0,129837$. En colonne S, on écrit le résultat de $0,390144 + 0,129837$ soit $0,519981$.

k	R	S
1	0,130 115	0,130 115
2	0,130 060	0,260 176
3	0,129 968	0,390 144
4	0,129 837	0,519 981
⋮		⋮
24	0,118 137	3,025 705
25	0,129 837	3,142 675
⋮		⋮
49	0,020 106	5,197 538
50	0	5,197 538

L'algorithme affiche $S = 5,197\,538$.

b) On prend donc $a = 5,197\,538$. On a $\frac{f(0) - f(2,5)}{n} = \frac{\ln(13,5)}{50}$. D'après l'énoncé,

$$5,197\,538 \leq I \leq 5,197\,538 + 2,5 \frac{\ln(13,5)}{50},$$

et donc, puisque $\mathcal{A} = 8I$,

$$8 \times 5,197\,538 \leq \mathcal{A} \leq 8 \times \left(5,197\,538 + 2,5 \frac{\ln(13,5)}{50} \right),$$

et donc

$$41,580\,304 \leq \mathcal{A} \leq 42,621\,380.$$

L'aire de la zone de creusement est donc 42m^2 au m^2 près.