Polynésie 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (commun à tous les candidats)

On s'intéresse à la chute d'une goutte d'eau qui se détache d'un nuage sans vitesse initiale. Un modèle très simplifié permet d'établir que la vitesse instantanée verticale, exprimée en m.s^{-1}, de chute de la goutte en fonction de la durée de chute t est donnée par la fonction v définie ainsi :

Pour tout réel positif ou nul t, $v(t) = 9,81\dfrac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$; la constante m est la masse de la goutte en milligramme et la constante k est un coefficient strictement positif lié au frottement de l'air.

On rappelle que la vitesse instantanée est la dérivée de la position.
Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Partie A - Cas général

1) Déterminer les variations de la vitesse de la goutte d'eau.

2) La goutte ralentit-elle au cours de sa chute ?

3) Montrer que $\lim_{t\to+\infty} v(t) = 9,81\dfrac{m}{k}$. Cette limite s'appelle vitesse limite de la goutte.

4) Un scientifique affirme qu'au bout d'une durée de chute égale à $\dfrac{5m}{k}$, la vitesse de la goutte dépasse 99 % de sa vitesse limite. Cette affirmation est-elle correcte ?

Partie B

Dans cette partie, on prend $m = 6$ et $k = 3,9$.
À un instant donné, la vitesse instantanée de cette goutte est 15 m.s^{-l}.

1) Depuis combien de temps la goutte s'est-elle détachée de son nuage ? Arrondir la réponse au dixième de seconde.

2) En déduire la vitesse moyenne de cette goutte entre le moment où elle s'est détachée du nuage et l'instant où on a mesuré sa vitesse. Arrondir la réponse au dixième de m.s^{-1}.

Liban 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

Partie A - Cas général

1) La fonction v est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour tout réel positif t,

$$v'(t) = 9,81 \times \frac{m}{k} \times \left(-\left(-\frac{k}{m}e^{-\frac{k}{m}t}\right)\right) = 9,81e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Pour tout réel positif t, on a $v'(t) > 0$ et donc la fonction v est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

2) La vitesse croît ou encore la goutte d'eau accélère dans sa chute. Elle ne ralentit pas.

3) Puisque $\frac{k}{m} > 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\frac{k}{m}t} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et donc $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = 9,81\frac{m}{k}(1-0) = 9,81\frac{m}{k}$.

4) Soit $t \in [0,+\infty[$.

$$\begin{aligned}v(t) \geqslant 0,99 \times 9,81\frac{m}{k} &\Leftrightarrow 9,81\frac{m}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right) \geqslant 0,99 \times 9,81\frac{m}{k} \Leftrightarrow 1-e^{-\frac{k}{m}t} \geqslant 0,99\\ &\Leftrightarrow 0,01 \geqslant e^{-\frac{k}{m}t} \Leftrightarrow e^{-\frac{k}{m}t} \leqslant \frac{1}{100}\\ &\Leftrightarrow \ln\left(e^{-\frac{k}{m}t}\right) \leqslant \ln\left(\frac{1}{100}\right) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0,+\infty[)\\ &\Leftrightarrow -\frac{k}{m}t \leqslant -\ln(100) \Leftrightarrow t \geqslant \frac{m\ln(100)}{k}.\end{aligned}$$

Ainsi, à partir de l'instant $t_0 = \frac{m\ln(100)}{k}$, la vitesse de la goutte d'eau dépasse 99% de sa vitesse limite. Or, $\ln(100) = 4,6\ldots$ et donc $5 \geqslant \ln(100)$ puis $\frac{5m}{k} \geqslant \frac{m\ln(100)}{k}$. L'affirmation du scientifique est donc correcte.

Partie B

1) Soit t un réel positif.

$$\begin{aligned}v(t) = 15 &\Leftrightarrow 9,81\frac{m}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right) = 15 \Leftrightarrow 1-e^{-\frac{k}{m}t} = \frac{15k}{9,81m}\\ &\Leftrightarrow e^{-\frac{k}{m}t} = 1-\frac{15k}{9,81m} \Leftrightarrow -\frac{k}{m}t = \ln\left(1-\frac{15k}{9,81m}\right) \Leftrightarrow t = -\frac{m}{k}\ln\left(1-\frac{15k}{9,81m}\right),\end{aligned}$$

avec

$$1-\frac{15k}{9,81m} = 1-\frac{15\times 3,9}{9,81\times 6} = 1-\frac{15\times 390}{981\times 6} = 1-\frac{5\times 65}{327} = \frac{2}{327}$$

et donc $v(t) = 15$ si et seulement si $t = -\frac{6}{3,9}\ln\left(\frac{2}{327}\right)$ ou encore $t = \frac{6}{3,9}\ln\left(\frac{327}{2}\right)$.

La calculatrice fournit $\frac{6}{3,9}\ln\left(\frac{327}{2}\right) = 7,8$ secondes arrondi au dixième de seconde.

2) La vitesse moyenne v_{moy} sur l'intervalle de temps allant de 0 à $\frac{6}{3,9}\ln\left(\frac{327}{2}\right)$ est la valeur moyenne de la vitesse instantanée sur l'intervalle $\left[0, \frac{6}{3,9}\ln\left(\frac{327}{2}\right)\right]$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{m}{k}\ln\left(\frac{327}{2}\right)} v(t)\,dt &= 9,81\frac{m}{k}\int_0^{\frac{m}{k}\ln\left(\frac{327}{2}\right)}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)dt = 9,81\frac{m}{k}\left(\int_0^{\frac{m}{k}\ln\left(\frac{327}{2}\right)} 1\,dt - \int_0^{\frac{m}{k}\ln\left(\frac{327}{2}\right)} e^{-\frac{k}{m}t}\,dt\right)\\
&= 9,81\frac{m}{k}\left(\frac{m}{k}\ln\left(\frac{327}{2}\right) - \left[-\frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\right]_0^{\frac{m}{k}\ln\left(\frac{327}{2}\right)}\right)\\
&= 9,81\frac{m}{k}\left(\frac{m}{k}\ln\left(\frac{327}{2}\right) - \left(\left(-\frac{m}{k}e^{-\ln\left(\frac{327}{2}\right)}\right) - \left(-\frac{m}{k}e^{0}\right)\right)\right)\\
&= 9,81\frac{m}{k}\left(\frac{m}{k}\ln\left(\frac{327}{2}\right) + \frac{m}{k}e^{-\ln\left(\frac{327}{2}\right)} - \frac{m}{k}\right) = 9,81\frac{m^2}{k^2}\left(\ln\left(\frac{327}{2}\right) + \frac{2}{327} - 1\right)\\
&= 9,81\frac{m^2}{k^2}\left(\ln\left(\frac{327}{2}\right) - \frac{325}{327}\right)
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
v_{moy} &= \frac{1}{\dfrac{6}{3,9}\ln\left(\dfrac{327}{2}\right)}\int_0^{\frac{6}{3,9}\ln\left(\frac{327}{2}\right)} v(t)\,dt = \frac{1}{\dfrac{6}{3,9}\ln\left(\dfrac{327}{2}\right)} \times 9,81\frac{6^2}{3,9^2}\left(\ln\left(\frac{327}{2}\right) - \frac{325}{327}\right)\\
&= \frac{6\times 9,81}{3,9\ln\left(\dfrac{327}{2}\right)}\left(\ln\left(\frac{327}{2}\right) - \frac{325}{327}\right)\\
&= 12,1\ \text{m.s}^{-1} \text{ arrondi au dixième de m.s}^{-1}.
\end{aligned}$$

