

# Liban 2017. Enseignement spécifique

## EXERCICE 4 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

L'épicéa commun est une espèce d'arbre résineux qui peut mesurer jusqu'à 40 mètres de hauteur et vivre plus de 150 ans.

L'objectif de cet exercice est d'estimer l'âge et la hauteur d'un épicéa à partir du diamètre de son tronc mesuré à 1,30 m du sol.

### Partie A - Modélisation de l'âge d'un épicéa

Pour un épicéa dont l'âge est compris entre 20 et 120 ans, on modélise la relation entre son âge (en années) et le diamètre de son tronc (en mètre) mesuré à 1,30 m du sol par la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0; 1[$  par :

$$f(x) = 30 \ln \left( \frac{20x}{1-x} \right)$$

où  $x$  désigne le diamètre exprimé en mètre et  $f(x)$  l'âge en années.

- 1) Démontrer que la fonction  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $]0; 1[$ .
- 2) Déterminer les valeurs du diamètre  $x$  du tronc tel que l'âge calculé dans ce modèle reste conforme à ses conditions de validité, c'est-à-dire compris entre 20 et 120 ans.

### Partie B

On a relevé la hauteur moyenne des épicéas dans des échantillons représentatifs d'arbres âgés de 50 à 150 ans. Le tableau suivant, réalisé à l'aide d'un tableur regroupe ces résultats et permet de calculer la vitesse de croissance moyenne d'un épicéa.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Âges (en années)	50	70	80	85	90	95	100	105	110	120	130	150
2	Hauteurs (en mètres)	11,2	15,6	18,05	19,3	20,55	21,8	23	24,2	25,4	27,6	29,65	33
3	Vitesse de croissance (en mètres par année)		0,22	0,245	0,25								

- 1) a) Interpréter le nombre 0,245 dans la cellule D3.  
b) Quelle formule doit-on entrer dans la cellule C3 afin de compléter la ligne 3 en recopiant la cellule C3 vers la droite ?
- 2) Déterminer la hauteur attendue d'un épicéa dont le diamètre du tronc mesuré à 1,30 m du sol vaut 27 cm.
- 3) La qualité du bois est meilleure au moment où la vitesse de croissance est maximale.
  - a) Déterminer un intervalle d'âges durant lequel la qualité du bois est la meilleure en expliquant la démarche.
  - b) Est-il cohérent de demander aux bûcherons de couper les arbres lorsque leur diamètre mesure environ 70 cm ?

# Liban 2017. Enseignement spécifique

## EXERCICE 4 : corrigé

### Partie A

1) Pour  $x \in ]0, 1[$ , on pose  $u(x) = \frac{20x}{1-x}$ . Pour  $x \in ]0, 1[$ ,  $20x > 0$  et  $1-x > 0$  et donc  $u(x) = \frac{20x}{1-x} > 0$ . Ainsi, la fonction  $u$  est dérivable et strictement positive sur  $]0, 1[$ . Puisque pour tout réel  $x$  de  $]0, 1[$ ,  $f(x) = 30 \ln(u(x))$ , la fonction  $f$  est dérivable sur  $]0, 1[$  et pour tout réel  $x$  de  $]0, 1[$ ,

$$f'(x) = 30 \frac{u'(x)}{u(x)} = 30 \times 20 \times \frac{1 \times (1-x) - x \times (-1)}{(1-x)^2} \times \frac{1}{\frac{20x}{1-x}} = 30 \times 20 \times \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{20x} = \frac{30}{x(1-x)}.$$

Pour tout réel  $x$  de  $]0, 1[$ ,  $x > 0$  et  $1-x > 0$ . Donc, pour tout réel  $x$  de  $]0, 1[$ ,  $x(1-x) > 0$  puis  $f'(x) > 0$ . On a montré que la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $]0, 1[$ .

2) Soit  $x \in ]0, 1[$  et soit  $a \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} f(x) = a &\Leftrightarrow 30 \ln \left( \frac{20x}{1-x} \right) = a \Leftrightarrow \ln \left( \frac{20x}{1-x} \right) = \frac{a}{30} \\ &\Leftrightarrow \frac{20x}{1-x} = e^{\frac{a}{30}} \Leftrightarrow 20x = e^{\frac{a}{30}} - x e^{\frac{a}{30}} \\ &\Leftrightarrow x \left( 20 + e^{\frac{a}{30}} \right) = e^{\frac{a}{30}} \Leftrightarrow x = \frac{e^{\frac{a}{30}}}{20 + e^{\frac{a}{30}}}. \end{aligned}$$

En particulier,  $f(x) = 20 \Leftrightarrow x = \frac{e^{\frac{20}{30}}}{20 + e^{\frac{20}{30}}} \Leftrightarrow x = \frac{e^{\frac{2}{3}}}{20 + e^{\frac{2}{3}}}$  et  $f(x) = 120 \Leftrightarrow x = \frac{e^{\frac{120}{30}}}{20 + e^{\frac{120}{30}}} \Leftrightarrow x = \frac{e^4}{20 + e^4}$ .

Puisque la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $]0, 1[$ , pour  $x \in ]0, 1[$ ,

$$20 \leq f(x) \leq 120 \Leftrightarrow f \left( \frac{e^{\frac{2}{3}}}{20 + e^{\frac{2}{3}}} \right) \leq f(x) \leq f \left( \frac{e^4}{20 + e^4} \right) \Leftrightarrow \frac{e^{\frac{2}{3}}}{20 + e^{\frac{2}{3}}} \leq x \leq \frac{e^4}{20 + e^4}.$$

On note que  $\frac{e^{\frac{2}{3}}}{20 + e^{\frac{2}{3}}} = 0,09$  à  $10^{-2}$  près par excès et  $\frac{e^4}{20 + e^4} = 0,73$  à  $10^{-2}$  près par défaut. Donc, l'âge reste dans les conditions de validité pour un diamètre de tronc compris au sens large entre 8 cm et 73 cm.

### Partie B

1) a) Le nombre 0,245 écrit dans la cellule D3 est le résultat du calcul :  $\frac{18,05 - 15,6}{80 - 70}$  qui est la croissance de la hauteur du tronc, exprimée en mètres, divisée par la durée, exprimée en année.

b) Dans la case C3, on doit rentrer la formule =  $\frac{C2 - B2}{C1 - B1}$ .

2) Un diamètre de 27 cm est modélisé par  $x = 0,27$ . L'âge de l'épicéa, exprimé en années, est alors

$$f(0,27) = 30 \ln \left( \frac{20 \times 0,27}{1 - 0,27} \right) = 30 \ln \left( \frac{540}{73} \right) = 60,033 \dots$$

soit environ 60 ans.

Soit  $h$  la hauteur de l'arbre, exprimée en mètres, quand l'arbre a 60 ans. La hauteur de l'arbre est de 11,2 m à 50 ans et 15,6 à 70 ans. En supposant la vitesse de croissance constante sur cette période, on a  $\frac{h - 11,2}{60 - 50} = 0,22$  et donc  $h = 11,2 + 10 \times 0,22 = 13,4$ .

La hauteur d'arbre attendue est de 13,4 mètres.

3) a) **Tableau complété.**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Agés (en années)	50	70	80	85	90	95	100	105	110	120	130	150
2	Hauteurs (en mètres)	11,2	15,6	18,05	19,3	20,55	21,8	23	24,2	25,4	27,6	29,65	33
3	Vitesse de croissance (en mètres par années)		0,22	0,245	0,25	0,25	0,25	0,24	0,24	0,24	0,22	0,205	0,1675

La vitesse de croissance est maximale pour un âge compris entre 80 et 95 ans.

b)  $f(0,7) = 30 \ln\left(\frac{20 \times 0,7}{0,3}\right) = 30 \ln\left(\frac{140}{3}\right) = 115,2 \dots$  Le diamètre est de 70 cm quand l'âge est environ 115 ans.

Cet âge n'est pas compris entre 80 et 95 ans et le bois sera donc de moins bonne qualité. Il n'est pas cohérent de demander aux bûcherons de couper les arbres lorsque leur diamètre mesure environ 70 cm.