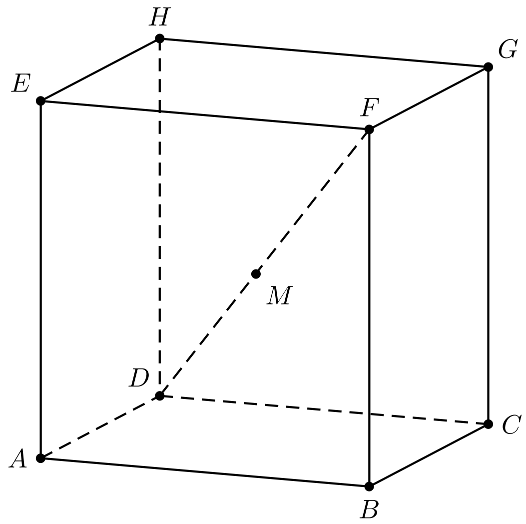
Liban 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (6 points) (commun à tous les candidats)

On considère un cube $ABCDEFGH$ dont la représentation graphique en perspective cavalière est donnée ci-contre.
Les arêtes sont de longueur 1.
L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(D\ ;\ \overrightarrow{DA},\ \overrightarrow{DC},\ \overrightarrow{DH}\right)$.



Partie A

1) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (EBG).

2) Déterminer une équation cartésienne du plan (EBG).

3) En déduire les coordonnées du point I intersection de la droite (DF) et du plan (EBG).
On démontrerait de la même manière que le point J intersection de la droite (DF) et du plan (AHC) a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{1}{3}\right)$.

Partie B

A tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, on associe le point M du segment $[DF]$ tel que $\overrightarrow{DM} = x\overrightarrow{DF}$.
On s'intéresse à l'évolution de la mesure θ en radian de l'angle $\widehat{EMB}$ lorsque le point M parcourt le segment $[DF]$.
On a $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

1) Que vaut θ si le point M est confondu avec le point D ? avec le point F ?

2) a) Justifier que les coordonnées du point M sont $(x\ ;\ x\ ;\ x)$.

b) Montrer que $\cos(\theta) = \dfrac{3x^2 - 4x + 1}{3x^2 - 4x + 2}$. On pourra pour cela s'intéresser au produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{ME}$ et $\overrightarrow{MB}$.

3) On a construit ci-dessous le tableau de variations de la fonction

$$f\ :\ x \longmapsto \frac{3x^2 - 4x + 1}{3x^2 - 4x + 2}.$$

x	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
Variations de f	$\frac{1}{2}$ ↘	0 ↘	$-\frac{1}{2}$ ↗	0

Pour quelles positions du point M sur le segment $[DF]$:

a) le triangle MEB est-il rectangle en M ?

b) l'angle θ est-il maximal ?

Liban 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

Partie A

1) Le point D a pour coordonnées $(0,0,0)$ et le point F a pour coordonnées $(1,1,1)$. Donc le vecteur $\overrightarrow{DF}$ a pour coordonnées $(1,1,1)$.
Le point B a pour coordonnées $(1,1,0)$, le point E a pour coordonnées $(1,0,1)$ et le point G a pour coordonnées $(0,1,1)$. Donc, le vecteur $\overrightarrow{BE}$ a pour coordonnées $(0,-1,1)$ et le vecteur $\overrightarrow{BG}$ a pour coordonnées $(-1,0,1)$.

$$\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{BE} = 1\times 0 + 1\times(-1) + 1\times 1 = 0$$

et

$$\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{BG} = 1\times(-1) + 1\times 0 + 1\times 1 = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BG}$ qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan (EBG). Donc, le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est un vecteur normal au plan (EBG).

2) Le plan (EBG) est le plan passant par le point $B(1,1,0)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{DF}(1,1,1)$. Une équation cartésienne du plan (EBG) est donc $1\times(x-1)+1\times(y-1)+1\times(z-0)=0$ ou encore $x+y+z-2=0$.

3) La droite (DF) est la droite passant par $D(0,0,0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{DF}(1,1,1)$. Un système d'équations paramétriques de la droite (DF) est $\left\{\begin{array}{l} x=t \\ y=t \\ z=t \end{array}\right.$, $t\in\mathbb{R}$.

Soit $M(t,t,t)$, $t\in\mathbb{R}$, un point de la droite (DF).

$$M\in(EBG) \Leftrightarrow t+t+t-2=0 \Leftrightarrow t=\frac{2}{3}.$$

Quand $t=\dfrac{2}{3}$, on obtient les coordonnées du point I : $\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$.

Partie B

1) $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{DB} = 1\times 1+0\times 1+1\times 0 = 1$. D'autre part, $[DE]$ est la diagonale d'un carré de côté 1 et donc $DE=\sqrt{2}$. De même, $DB=\sqrt{2}$ puis

$$\cos\left(\widehat{EDB}\right) = \frac{\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{DB}}{DE\times DB} = \frac{1}{2}.$$

On en déduit que $\widehat{EDB}=\dfrac{\pi}{3}$. D'autre part, $\widehat{EFB}=\dfrac{\pi}{2}$.

2) a) D'après la question 3) de la partie A, les coordonnées du point M sont de la forme (x,x,x) où $x\in\mathbb{R}$. De plus, le point M appartient au segment $[DF]$ si et seulement si $x\in[0,1]$.

b) $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{EM}.\overrightarrow{BM} = (x-1)(x-1)+(x-0)(x-1)+(x-1)(x-0) = x^2-2x+1+x^2-x+x^2-x = 3x^2-4x+1$.
$EM=\sqrt{(x-1)^2+(x-0)^2+(x-1)^2}=\sqrt{x^2-2x+1+x^2+x^2-2x+1}=\sqrt{3x^2-4x+2}$ et
$BM=\sqrt{(x-1)^2+(x-1)^2+(x-0)^2}=\sqrt{3x^2-4x+2}=EM$. Donc,

$$\cos(\theta) = \frac{\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MB}}{EM\times BM} = \frac{3x^2-4x+1}{\left(\sqrt{3x^2-4x+2}\right)^2} = \frac{3x^2-4x+1}{3x^2-4x+2}.$$

3) a) Le triangle MEB est rectangle en M si et seulement si $\cos(\theta)=0$ ce qui équivaut à $x=\dfrac{1}{3}$ ou $x=1$. $x=1$ est le cas où $M=F$. $x=\dfrac{1}{3}$ est le cas où M est le point J.

En résumé, le triangle EMB est rectangle en M si et seulement si $M=F$ ou $M=J$.

b) La fonction cosinus est décroissante sur $[0,\pi]$ et donc θ est maximal si et seulement si $\cos(\theta)$ est minimal ce qui équivaut à $x=\dfrac{2}{3}$. $x=\dfrac{2}{3}$ est le cas où M est le point I.

En résumé, θ est maximal si et seulement si $M=I$ et dans ce cas $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$.

