

France métropolitaine 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

1) Soient a un réel puis A le point de coordonnées $(1, a, a^2)$.

$$2x_A - z_A - 3 = 2 - a^2 - 3 = -1 - a^2.$$

$2x_A - z_A - 3$ est un réel strictement négatif et en particulier, $2x_A - z_A - 3 \neq 0$. On en déduit que le point A n'appartient pas au plan \mathcal{P} .

2) a) Un vecteur normal au plan \mathcal{P} est le vecteur $\vec{n}(2, 0, -1)$. La droite \mathcal{D} est la droite passant par $A(1, a, a^2)$ et de vecteur directeur $\vec{n}(2, 0, -1)$. Une représentation paramétrique de \mathcal{D} est

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = a \\ z = a^2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

b) Soit $M(1 + 2t, a, a^2 - t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de \mathcal{D} .

$$AM = \sqrt{(1 + 2t - 1)^2 + (a - a)^2 + (a^2 - t - a^2)^2} = \sqrt{5t^2} = \sqrt{5}|t|.$$

3) Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminons les coordonnées du point H . Soit $M(1 + 2t, a, a^2 - t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de \mathcal{D} .

$$M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow 2(1 + 2t) - (a^2 - t) - 3 = 0 \Leftrightarrow 5t - a^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{a^2 + 1}{5}.$$

Le point H est le point de \mathcal{D} associé au paramètre $t_0 = \frac{a^2 + 1}{5}$. D'après la question précédente,

$$AH = \sqrt{5}|t_0| = \sqrt{5} \frac{a^2 + 1}{5} = \frac{a^2 + 1}{\sqrt{5}}.$$

Cette distance est minimale pour $a = 0$, auquel cas A est le point de coordonnées $(1, 0, 0)$, et la distance minimale est $\frac{1}{\sqrt{5}}$.