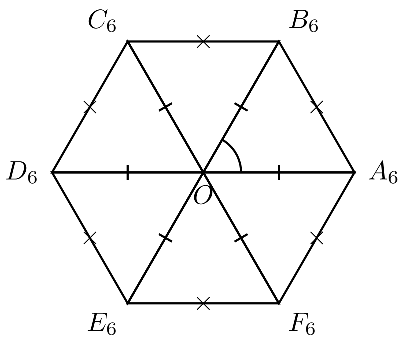
Centres étrangers 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Pour tout entier $n \geqslant 4$, on considère P_n un polygone régulier à n côtés, de centre O et dont l'aire est égale à 1. On admet qu'un tel polygone est constitué de n triangles superposables à un triangle OA_nB_n donné, isocèle en O.
On note $r_n = OA_n$ la distance entre le centre O et le sommet A_n d'un tel polygone.

Partie A : étude du cas particulier $n = 6$



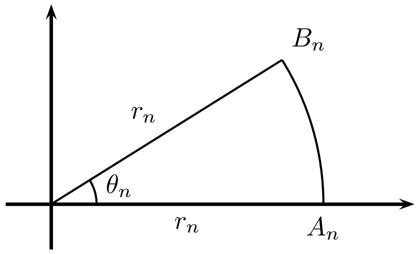
On a représenté ci-contre un polygone P_6.

1) Justifier le fait que le triangle OA_6B_6 est équilatéral, et que son aire est égale à $\dfrac{1}{6}$.

2) Exprimer en fonction de r_6 la hauteur du triangle OA_6B_6 issue du sommet B_6.

3) En déduire que $r_6 = \sqrt{\dfrac{2}{3\sqrt{3}}}$.

Partie B : cas général avec $n \geqslant 4$



Dans cette partie, on considère le polygone P_n avec $n \geqslant 4$, construit de telle sorte que le point A_n soit situé sur l'axe réel, et ait pour affixe r_n.
On note alors $r_ne^{i\theta_n}$ l'affixe de B_n où θ_n est un réel de l'intervalle $\left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

1) Exprimer en fonction de r_n et θ_n la hauteur issue de B_n dans le triangle $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$ puis établir que l'aire de ce triangle est égale à $\dfrac{r_n^2}{2}\sin(\theta_n)$.

2) On rappelle que l'aire du polygone P_n est égale à 1.
Donner, en fonction de n, une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA_n}, \overrightarrow{OB_n}\right)$, puis démontrer que :

$$r_n = \sqrt{\frac{2}{n\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}}.$$

Partie C : étude de la suite (r_n)

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ \pi[$ par

$$f(x) = \frac{x}{\sin x}.$$

Ainsi, le nombre r_n, défini dans la partie B pour $n \geqslant 4$, s'exprime à l'aide de la fonction f par :

$$r_n = \sqrt{\frac{1}{\pi}f\left(\frac{2\pi}{n}\right)}.$$

On admet que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0\ ;\ \pi[$.

1) Montrer que la suite (r_n) est décroissante. On pourra pour cela commencer par démontrer que pour tout $n \geqslant 4$, on a : $0 < \dfrac{2\pi}{n+1} < \dfrac{2\pi}{n} < \pi$.

2) En déduire que la suite (r_n) converge. On ne demande pas de déterminer sa limite L, et on admet dans la suite de l'exercice que $L = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

3) On considère l'algorithme suivant.

VARIABLES :	n est un nombre entier
TRAITEMENT :	n prend la valeur 4
	Tant que $\sqrt{\dfrac{2}{n\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}} > 0,58$ faire
	n prend la valeur $n+1$
	Fin Tant que
SORTIE :	Afficher n

Quelle valeur numérique de n va afficher en sortie cet algorithme ?

Centres étrangers 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

Partie A : étude du cas particulier $n = 6$

1) Puisque $OA_6 = OB_6 = r_6$, OA_6B_6 est un triangle isocèle en O. Puisque les 6 triangles sont superposables, l'angle au sommet est $\widehat{A_6OB_6} = \dfrac{2\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$. Puisque le triangle OA_6B_6 est un triangle isocèle en O, $\widehat{OA_6B_6} = \widehat{OB_6A_6}$ et donc

$$\pi = \widehat{A_6OB_6} + \widehat{OA_6B_6} + \widehat{OB_6A_6} = \frac{\pi}{3} + 2\widehat{OA_6B_6}$$

et donc $\widehat{OA_6B_6} = \dfrac{1}{2}\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\pi}{3}$. Finalement, $\widehat{A_6OB_6} = \widehat{OA_6B_6} = \widehat{OB_6A_6} = \dfrac{\pi}{3}$ et donc le triangle OA_6B_6 est équilatéral.

Son aire est le sixième de l'aire du polygone P_6 et est donc égale à $\dfrac{1}{6}$.

2) On note H_6 le projeté orthogonal du point B_6 sur la droite (OA_6). Dans le triangle OH_6B_6, rectangle en H_6, on a $\dfrac{H_6B_6}{OB_6} = \sin\left(\widehat{H_6OB_6}\right)$ et donc

$$H_6B_6 = OB_6 \times \sin\left(\widehat{H_6OB_6}\right) = r_6 \times \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{r_6\sqrt{3}}{2}.$$

3) L'aire $\mathscr{A}_6$ du triangle OA_6B_6 est

$$\mathscr{A}_6 = \frac{OA_6 \times H_6B_6}{2} = \frac{r_6 \times \dfrac{r_6\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{r_6^2\sqrt{3}}{4}.$$

Par suite,

$$\mathscr{A}_6 = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{r_6^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow r_6^2 = \frac{4}{6\sqrt{3}} \Leftrightarrow r_6^2 = \frac{2}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow r_6 = \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}}.$$

On a montré que $r_6 = \sqrt{\dfrac{2}{3\sqrt{3}}}$.

Partie B : cas général avec $n \geqslant 4$

1) On note H_n le projeté orthogonal du point B_n sur la droite (OA_n). Dans le triangle OH_nB_n, rectangle en H_n, on a $\dfrac{H_nB_n}{OB_n} = \sin\left(\widehat{H_nOB_n}\right)$ et donc

$$H_nB_n = OB_n \times \sin\left(\widehat{H_nOB_n}\right) = r_n \sin(\theta_n).$$

L'aire $\mathscr{A}_n$ du triangle OA_nB_n est

$$\mathscr{A}_n = \frac{OA_n \times H_nB_n}{2} = \frac{r_n \times r_n \sin(\theta_n)}{2} = \frac{r_n^2 \sin(\theta_n)}{2}.$$

2) Puisque les n triangles sont superposables, l'aire $\mathscr{A}_n$ du polygone P_n est égale à $\dfrac{1}{n}$ et l'angle θ_n est égal à $\dfrac{2\pi}{n}$. Ensuite,

$$\mathscr{A}_n = \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{r_n^2 \sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}{2} = \frac{1}{n} \Leftrightarrow r_n^2 = \frac{2}{n\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}.$$

Enfin, $\theta_n \in]0, \pi[$ et donc $\sin(\theta_n) > 0$ puis

$$r_n = \sqrt{\frac{2}{n\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}}.$$

Partie C : étude de la suite (r_n)

1) Soit $n \geqslant 4$. Alors, $0 < n < n+1$ et donc $0 < \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{4}$. On en déduit que $0 < \dfrac{2\pi}{n+1} < \dfrac{2\pi}{n} \leqslant \dfrac{2\pi}{4} < \pi$. Puisque la fonction f est décroissante ur $]0,\pi[$, on en déduit que $f\left(\dfrac{2\pi}{n+1}\right) < f\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$ puis que $\dfrac{1}{\pi}f\left(\dfrac{2\pi}{n+1}\right) < \dfrac{1}{\pi}f\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$ et finalement $\sqrt{\dfrac{1}{\pi}f\left(\dfrac{2\pi}{n+1}\right)} < \sqrt{\dfrac{1}{\pi}f\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)}$ par stricte croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0,+\infty[$.

Finalement, pour tout $n \geqslant 4$, $r_{n+1} < r_n$ et donc la suite $(r_n)_{n\geqslant 4}$ est strictement décroissante.

2) La suite $(r_n)_{n\geqslant 4}$ est décroissante et minorée par 0. Donc, la suite $(r_n)_{n\geqslant 4}$ converge vers un certain réel positif ou nul L.

3) L'algorithme affiche la première valeur de n à partir de laquelle on a $r_n \leqslant 0,58$.

