Centres étrangers 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (4 points) (commun à tous les candidats)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.
On considère deux droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques :

$$d_1 : \left\{\begin{array}{l} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{array}\right. , \ t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d_2 : \left\{\begin{array}{l} x = -5 + 2t' \\ y = -1 + t' \\ z = 5 \end{array}\right. , \ t' \in \mathbb{R}.$$

On admet que les droites d_1 et d_2 sont non coplanaires.
Le but de cet exercice est de déterminer, si elle existe, une troisième droite Δ qui soit à la fois sécante avec les deux droites d_1 et d_2 et orthogonale à ces deux droites.

1) Vérifier que le point $A(2\ ;\ 3\ ;\ 0)$ appartient à la droite d_1.

2) Donner un vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$ de la droite d_1 et un vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}$ de la droite d_2.
Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ?

3) Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{v}(1\ ;\ -2\ ;\ -3)$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$.

4) Soit P le plan passant par le point A, et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{v}$.
On étudie dans cette question l'intersection de la droite d_2 et du plan P.

a) Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est : $5x + 4y - z - 22 = 0$.

b) Montrer que la droite d_2 coupe le plan P au point $B(3\ ;\ 3\ ;\ 5)$.

5) On considère maintenant la droite Δ dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v}(1\ ;\ -2\ ;\ -3)$, et passant par le point $B(3\ ;\ 3\ ;\ 5)$.

a) Donner une représentation paramétrique de cette droite Δ.

b) Les droites d_1 et Δ sont-elles sécantes ? Justifier la réponse.

c) Expliquer pourquoi la droite Δ répond au problème posé.

Centres étrangers 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

1) Si $t = 0$, on obtient $x = 2 = x_A$, $y = 3 = y_A$ et $z = 0 = z_A$ dans la représentation paramétrique de d_1. Donc, le point A appartient à la droite d_1.

2) Un vecteur directeur de d_1 est $\overrightarrow{u_1}(1, -1, 1)$ et un vecteur directeur de d_2 est $\overrightarrow{u_2}(2, 1, 0)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires et donc les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

3)

$$\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u_1} = 1 \times 1 + (-2) \times (-1) + (-3) \times 1 = 1 + 2 - 3 = 0$$

et

$$\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u_2} = 1 \times 2 + (-2) \times 1 + (-3) \times 0 = 2 - 2 = 0.$$

Donc, le vecteur $\overrightarrow{v}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$.

4) a) Soit P' le plan d'équation $5x + 4y - z - 22 = 0$. $5x_A + 4y_A - z_A - 22 = 5 \times 2 + 4 \times 3 - 0 - 22 = 0$ et donc le point A appartient au plan P'.

Un vecteur normal au plan P' est le vecteur $\overrightarrow{n}(5, 4, -1)$.

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{u_1} = 5 \times 1 + 4 \times (-1) + (-1) \times 1 = 5 - 4 - 1 = 0$$

et

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{v} = 5 \times 1 + 4 \times (-2) + (-1) \times (-3) = 5 - 8 + 3 = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{v}$. En résumé, le plan P' est le plan passant par A et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{v}$ ou encore $P' = P$. Ainsi, P est le plan d'équation $5x + 4y - z - 22 = 0$.

b) Soit $M'(-5 + 2t', -1 + t', 5)$, $t' \in \mathbb{R}$, un point de la droite d_2.

$$M' \in P \Leftrightarrow 5(-5 + 2t') + 4(-1 + t') - 5 - 22 = 0 \Leftrightarrow 14t' - 56 = 0 \Leftrightarrow t' = 4.$$

$t' = 4$ fournit le point de coordonnées $(3, 3, 5)$ qui est effectivement le point B. La droite d_2 coupe le plan P au point $B(3, 3, 5)$.

5) a) Δ est la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = 3 + u \\ y = 3 - 2u \\ z = 5 - 3u \end{array}\right.$, $u \in \mathbb{R}$.

b) Soient $M(2 + t, 3 - t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de d_1 et $N(3 + u, 3 - 2u, 5 - 3u)$, $u \in \mathbb{R}$, un point de Δ.

$$M = N \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2 + t = 3 + u \\ 3 - t = 3 - 2u \\ t = 5 - 3u \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = u + 1 \\ 3 - (u + 1) = 3 - 2u \\ u + 1 = 5 - 3u \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = u + 1 \\ u = 1 \\ u = 1 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = 2 \\ u = 1 \end{array}\right.$$

Les droites d_1 et Δ sont donc sécantes en le point de coordonnées $(4, 1, 2)$.

c) $\overrightarrow{v}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ou encore la droite Δ est orthogonale aux droites d_1 et d_2. D'après la question précédente, les droites Δ et d_1 sont sécantes et d'autre part, les droites Δ et d_2 sont sécantes en B. Finalement, la droite Δ est perpendiculaire aux droites d_1 et d_2 ou encore la droite Δ répond au problème posé.

