Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique.
Mathématiques.

Partie I. Préliminaires

1) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$u_{n+1} - u_n = H_{n+1} - H_n - (\ln(n+1) - \ln n) = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \int_n^{n+1} \frac{1}{n+1}\,dx - \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx$$
$$= \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{x}\right) dx.$$

Pour tout réel x de $[n, n+1]$, $\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{x} \leqslant 0$ et donc $\displaystyle\int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{x}\right) dx \leqslant 0$.

On a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$. Donc, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par décroissance de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$, pour $k \in [\![1, n]\!]$, $\dfrac{1}{k} \geqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx$. En sommant ces inégalités, on obtient

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \ln(n+1)$$

puis

$$u_n = H_n - \ln n \geqslant \ln(n+1) - \ln n \geqslant 0.$$

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc convergente. Posons $\gamma = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
On a donc $H_n - \ln n \underset{n\to+\infty}{=} \gamma + o(1)$ ou encore

$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1).$$

2) Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists A > 0/\ \forall x \geqslant 0\ (x \geqslant A \Rightarrow |f(x)| \leqslant \varepsilon)$.
En particulier, il existe $A > 0$ tel que pour tout $x \geqslant A$, $|f(x)| \leqslant 1$. A est ainsi dorénavant fixé.

La fonction $|f|$ est continue sur le segment $[0, A]$ et en particulier, la fonction $|f|$ est bornée sur ce segment. Soit M un majorant de la fonction $|f|$ sur $[0, A]$. Soit $M' = \mathrm{Max}\{M, 1\}$.
Pour tout x de $[0, A]$, $|f(x)| \leqslant M \leqslant M'$ et pour tout x de $[A, +\infty[$, $|f(x)| \leqslant 1 \leqslant M'$. Finalement, pour tout x de $\mathbb{R}^+$, $|f(x)| \leqslant M'$.

On a montré que la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

3) a) Soit N un entier naturel non nul.

$$\sum_{k=0}^{N} P([X > k]) = \sum_{k=0}^{N} \left(P(k < X \leqslant N) + P(X > N+1)\right) = \sum_{k=0}^{N} P(k < X \leqslant N) + \sum_{k=0}^{N} P(X > N+1)$$
$$= \sum_{k=0}^{N-1} P(k < X \leqslant N) + \sum_{k=0}^{N} P(X > N)$$
$$= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{j=k+1}^{N} P(X = j)\right) + (N+1)P([X > N]) = \sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{k=0}^{j-1} P(X = j)\right) + (N+1)P([X > N])$$
$$= \sum_{j=1}^{N} jP(X = j) + (N+1)P([X > N]).$$

On peut décider que cette dernière égalité reste vraie quand $N = 0$ avec la convention usuelle qu'une somme vide est nulle. On a montré que

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{N} P([X > k]) = \sum_{k=1}^{N} kP(X = k) + (N+1)P([X > N]).$$

b) (i) Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}(N+1)P([X > N]) &= (N+1)\sum_{k=N+1}^{+\infty} P([X = k]) = \sum_{k=N+1}^{+\infty} (N+1)P([X = k]) \\ &\leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty} kP([X = k]).\end{aligned}$$

Par hypothèse, X admet une espérance ou encore la série de terme général $kP(X = k)$, $k \in \mathbb{N}$, converge et on sait alors que $R_N = \sum_{k=N+1}^{+\infty} kP([X = k])$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$.

Puisque pour tout $N \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant (N+1)P([X > N]) \leqslant R_N$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que la suite $((N+1)P([X > N]))_{N\in\mathbb{N}}$ converge et que

$$\lim_{N\to+\infty} (N+1)P([X > N]) = 0.$$

b) (ii) D'autre part, la suite $\left(\sum_{k=1}^{N} kP([X = k])\right)_{N\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{N} kP([X = k])\right)_{N\in\mathbb{N}}$ converge et de plus

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} kP([X = k]) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP([X = k]) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP([X = k]) = E(X).$$

Donc, d'après les questions a) et b)(i), la suite $\left(\sum_{k=0}^{N} kP([X > k])\right)_{N\in\mathbb{N}}$ converge ou encore la série numérique de terme général $P([X > n])$, $n \in \mathbb{N}$, converge et de plus

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P([X > n]) = E(X).$$

c) Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} kP([X = k]) &\leqslant \sum_{k=1}^{N} kP([X = k]) + (N+1)P([X > N]) = \sum_{k=0}^{N} P([X > k]) \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} P([X > k]) < +\infty\end{aligned}$$

Ainsi, la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{N} kP([X = k])\right)_{N\in\mathbb{N}}$ est majorée. Puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$, $kP([X = k]) \geqslant 0$, on sait que la série de terme général $kP([X = k])$, $k \in \mathbb{N}$, converge ou encore, X admet une espérance finie. D'après la question précédente, on a de nouveau

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P([X > n]).$$

d) (i) Soit $n \in \mathbb{Z}$. La fonction $f\ : t \mapsto P([X > t])$ est constante sur chaque intervalle $[n, n+1[$, $n \in \mathbb{Z}$ et en particulier est continue sur chacun de ses intervalles. De plus, $\lim\limits_{\substack{t\to n\\ t<n}} f(t) = \lim\limits_{\substack{t\to k\\ t<n}} f(k-1) = f(n-1) = P([X > n-1])$.

En résumé, f est continue sur chaque $[n, n+1[$, $n \in \mathbb{Z}$, et pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, $f_{/[n,n+1[}$ se prolonge en une fonction continue sur $[n, n+1]$. En particulier, dans tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, f n'a qu'un nombre fini de points discontinuité puis f est continue par morceaux sur $[a, b]$.

f est donc continue par morceaux sur tout segment de $\mathbb{R}$ puis sur $\mathbb{R}$.

d) (ii) La fonction $f\ : t \mapsto P([X > t])$ est positive et décroissante sur $\mathbb{R}$. On sait que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} P([x > t])\ dt$ et la série numérique de terme général $P([X > n])$, $n \in \mathbb{N}$, sont de même nature.

Mais alors, d'après les questions b) et c), l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} P([X > t])\ dt$ est convergente si et seulement si X admet une espérance finie et dans ce cas,

$$\int_0^{+\infty} P([X > t])\ dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_n^{n+1} P([X > t])\ dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_n^{n+1} P([X > n])\ dt = \sum_{n=0}^{+\infty} P([X > n]) = E(X).$$

e) X a un moment d'ordre 2 si et seulement si X^2 a une espérance ce qui équivaut à la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} P\left(\left[X^2 > t\right]\right) dt$. En posant $u = \sqrt{t}$ et donc $t = u^2$ puis $dt = 2u\ du$, les intégrales obtenues sont de même nature et

$$E\left(X^2\right) = \int_0^{+\infty} P\left(\left[X^2 > t\right]\right) dt = \int_0^{+\infty} P\left(\left[X > \sqrt{t}\right]\right) dt = \int_0^{+\infty} P\left([X > u]\right) 2u\ du = 2\int_0^{+\infty} tP([X > t])\ dt.$$

En résumé, X a un moment d'ordre 2 si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} tP([X > t])\ dt$ est convergente et dans ce cas

$$E\left(X^2\right) = 2\int_0^{+\infty} tP([X > t])\ dt.$$

4) Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $a'_n = \dfrac{a_n}{n!}$ et $b'_n = \dfrac{b_n}{n!}$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} a'_k b'_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!}\frac{b_{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}a_k b_{n-k} = \frac{c_n}{n!}.$$

Donc, si pour tout réel x, les séries de termes généraux respectifs $\dfrac{a_n}{n!}x^n$ et $\dfrac{b_n}{n!}x^n$ convergente absolument, alors la série de terme général $\dfrac{c_n}{n!}x^n$ converge absolument et dans ce cas, pour tout réel x,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{c_n}{n!}x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n!}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b_n}{n!}x^n\right).$$

5) a) On sait que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ puis que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P([X = k]) = p(1-p)^{k-1}$. Si on pose $Y = X - 1$, alors $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ puis pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P([Y = k]) = P([X = k+1]) = p(1-p)^k.$$

Immédiatement, $P_{[X>1]}(X - 1 = 0) = 0$ et pour $k \geqslant 1$,

$$P_{[X>1]}(X - 1 = k) = \frac{P([X > 1] \cap [X - 1 = k])}{P([X > 1])} = \frac{P([X - 1 = k])}{1 - P([X = 1])} = \frac{p(1-p)^k}{1-p} = p(1-p)^{k-1}.$$

Pour la loi conditionnelle $P_{[X>1]}$, $X - 1$ suit la loi géométrique de paramètre p.

b) Pour $i \in [\![1, r]\!]$, posons $A_i = [X_i > 1]$. Puisque les variables $X_1, \ldots, X_r$, sont mutuellement indépendantes, les événements $[X_i = 1] = \overline{A_i}$, $1 \leqslant i \leqslant r$, sont mutuellement indépendants puis les événements A_i, $1 \leqslant i \leqslant r$, sont mutuellement indépendants.

$\left(X_1 - 1, \ldots, X_r - 1\right)(\Omega) = \mathbb{N}^r$. Soit $(k_1, \ldots, k_r) \in \mathbb{N}^r$.

Il est clair que si l'un des k_i est nul, $1 \leqslant i \leqslant r$,

$$P_A\left((X_1 - 1, \ldots, X_r - 1) = (k_1, \ldots, k_r)\right) = 0 = P\left((X_1, \ldots, X_r) = (k_1, \ldots, k_r)\right).$$

Soit donc $(k_1, \ldots, k_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$. Alors, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $k_i + 1 > 1$ puis,

$$\begin{aligned}
P_A\left((X_1-1,\dots,X_r-1)=(k_1,\dots,k_r)\right) &= P_A\left((X_1,\dots,X_r)=(k_1+1,\dots,k_r+1)\right)\\
&= \frac{P\left(A\cap\left((X_1,\dots,X_r)=(k_1+1,\dots,k_r+1)\right)\right)}{P(A)}\\
&= \frac{P\left((A_1\cap[X_1=k_1+1])\cap\dots\cap(A_r\cap[X_r=k_r+1])\right)}{P\left(A_1\cap\dots\cap A_r\right)}\\
&= \frac{P\left(A_1\cap[X_1=k_1+1]\right)}{P\left(A_1\right)}\times\dots\times\frac{P\left(A_r\cap[X_r=k_r+1]\right)}{P\left(A_r\right)}
\end{aligned}$$

puisque les différents événements considérés sont deux à deux indépendants. On en déduit que, d'après la question a), que

$$\begin{aligned}
P_A\left((X_1-1,\dots,X_r-1)=(k_1,\dots,k_r)\right) &= p(1-p)^{k_1-1}\times\dots\times p(1-p)^{k_r-1}\\
&= P\left((X_1,\dots,X_r)=(k_1,\dots,k_r)\right).
\end{aligned}$$

6) a) Supposons $X(\Omega)\subset\mathbb{R}$. Pour $\omega\in\Omega$, $X1_A(\omega)=\left\{\begin{array}{l} X(\omega)\text{ si }\omega\in A\\ 0\text{ si }\omega\notin A\end{array}\right.$.

$$\begin{aligned}
E\left(X1_A\right) &= \sum_{\omega\in\Omega}X1_A(\omega)P\left(X1_A=X1_A(\omega)\right)=\sum_{\omega\in A}X(\omega)P\left(X=X(\omega)\right)=\sum_{\omega\in\Omega}X(\omega)P\left((X=X(\omega))\cap(\omega\in A)\right)\\
&= \sum_{\omega\in\Omega}X(\omega)P(A)\times P_A(X=X(\omega))=P(A)\sum_{\omega\in\Omega}X(\omega)P_A(X=X(\omega))\\
&= P(A)E_A(X).
\end{aligned}$$

b) Par hypothèse, $1_{A_1}+\dots+1_{A_n}=1_\Omega=1$ et donc, par linéarité de l'espérance et d'après la question précédente,

$$E(X)=E\left(X\left(1_{A_1}+\dots+1_{A_n}\right)\right)=\sum_{k=1}^{n}E\left(X1_{A_k}\right)=\sum_{k=1}^{n}E_{A_k}(X)P\left(A_k\right)$$

7) Montrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, I_n est une variable aléatoire sur l'espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$.

- Pour $n=1$, $I_n=X_1$ est une variable aléatoire.
- Soit $n\geqslant 1$. Supposons que $I_n=\text{Min}\left(X_1,\dots,X_n\right)$ soit une variable aléatoire sur $(\Omega,\mathscr{A},P)$. Alors,

$$I_{n+1}=\text{Min}\left(I_n,X_{n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(I_n+X_{n+1}-|I_n-X_{n+1}|\right).$$

  est une variable aléatoire sur $(\Omega,\mathscr{A},P)$.

On a montré par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, I_n est une variable aléatoire sur $(\Omega,\mathscr{A},P)$.

Partie II. Etude du minimum

1) • Soit $i\in[\![1,n]\!]$. Pour $k\in\mathbb{N}^*$,

$$P\left(X_i\leqslant k\right)=\sum_{j=1}^{k}P(X=j)=\sum_{j=1}^{k}pq^{j-1}=p\frac{1-q^k}{1-q}=1-q^k$$

puis $P\left(X_i>k)\right)=1-P\left(X\leqslant k\right)=q^k$.

$I_n(\Omega)=\mathbb{N}^*$. Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Puisque les variables X_i sont indépendantes,

$$P(I_n>k)=P\left(\bigcap_{i=1}^{n}\left(X_i>k\right)\right)=\prod_{i=1}^{n}P\left(X_i>k\right)=\prod_{i=1}^{n}q^k=q^{nk}$$

et donc aussi $P\left(I_n\leqslant k\right)=1-q^{nk}$.

Soit $k\geqslant 2$. $P(I_n=k)=P\left(I_n>k-1\right)-P\left(I_n>k\right)=q^{n(k-1)}-q^{nk}=q^{(k-1)n}\left(1-q^n\right)=\left(1-q^n\right)\left(q^n\right)^{k-1}$.

Cette dernière égalité reste vraie quand $k = 1$, car $P(I_n = 1) = P(I_n \leqslant 1) = 1 - q^n$.

En résumé, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(I_n = k) = (1 - q^n)(q^n)^{k-1}$. I_n suit donc la loi géométrique de paramètre $1 - q^n$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(I_n = 1) = 1 - q^n$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} P(I_n = 1) = 1$. D'autre part, pour $k \geqslant 2$, $\lim\limits_{n \to +\infty} P(I_n = k) = \lim\limits_{n \to +\infty} (1 - q^n)\left(q^{k-1}\right)^n = 0$ car $q^{k-1} \in]0, 1[$. En résumé,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \lim_{n \to +\infty} P(I_n = k) = \delta_{1,k}.$$

D'autre part, on sait que $E(I_n) = \dfrac{1}{1 - q^n}$ et $V(I_n) = \dfrac{1 - (1 - q^n)}{(1 - q^n)^2} = \dfrac{q^n}{(1 - q^n)^2}$. Donc,

$$\lim_{n \to +\infty} E(I_n) = 1 \text{ et } \lim_{n \to +\infty} V(I_n) = 0.$$

3) a) Soit $\omega \in \Omega$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\text{Min}(X_1(\omega), \dots, X_{n+1}(\omega)) = \text{Min}(\text{Min}(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)), X_{n+1}(\omega)) \leqslant \text{Min}(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$$

ou encore $I_{n+1}(\omega) \leqslant I_n(\omega)$. Ainsi, la suite $(I_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels positifs. On en déduit que la suite $(I_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une limite notée $\ell(\omega)$. Puisque de plus la suite $(I_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite convergente d'entiers naturels non nuls, on en déduit que cette suite est constante à partir d'un certain rang puis que $\ell(\omega)$ est un entier naturel non nul qui est la valeur de $I_n(\omega)$ à partir d'un certain rang.

b) D'après la question précédente, pour $\omega \in \Omega$, $\ell(\omega) = 1$ si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $I_n(\omega) = 1$. Dit autrement,

$$\mathscr{L} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [I_n = 1].$$

Maintenant, $\omega \in [I_n = 1] \Rightarrow I_n(\omega) = 1 \Rightarrow I_{n+1}(\omega) = 1 \Rightarrow \omega \in [I_{n+1} = 1]$. Donc, la suite $([I_n = 1])_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements croissante pour l'inclusion. D'après le théorème de continuité croissante,

$$P(\mathscr{L}) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} [I_n = 1]\right) = \lim_{n \to +\infty} P(I_n = 1]) = 1.$$

$\mathscr{L}$ est donc un événement presque sûr.

Partie III. Etude du maximum

1) a) (i) On sait que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $E(X_i) = \dfrac{1}{p}$. Or,

$$X_1 \leqslant M_n \leqslant X_1 + \ldots + X_n.$$

Par croissance et linéarité de l'espérance,

$$\frac{1}{p} = E(X_1) \leqslant E(M_n) \leqslant \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{n}{p}.$$

a) (ii) $M_n(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $[M_n \leqslant k] = \bigcap\limits_{i=1}^{n} [X_i \leqslant k]$ et donc, les variables X_i étant mutuellement indépendantes,

$$P([M_n \leqslant k]) = \prod_{i=1}^{n} P([X_i \leqslant k]) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - q^k\right) = \left(1 - q^k\right)^n.$$

b) i) Soit $K \in \mathbb{N}^*$. Notons respectivement A_1 et A_2 les événements $[M_n \leqslant K]$ et $[M_n > K]$. (A_1, A_2) est une partition de Ω et $P(A_1) \neq 0$ et $P(A_2) \neq 0$. D'après la question 6 de la partie I,

$$E(M_n) = E_{A_1}(M_n) P(A_1) + E_{A_2}(M_n) P(A_2) = E\left(M_n 1_{[M_n \leqslant K]}\right) + E_{[M_n > K]}(M_n) P([M_n > K]).$$

D'après l'inégalité de Markov, (puisque M_n est une variable positive),

$$E_{[M_n > K]}(M_n) \geqslant K P_{[M_n > K]}([M_n > K]) = K$$

et donc

$$E(M_n) \geqslant E\left(M_n 1_{[M_n \leqslant K]}\right) + K P([M_n > K]).$$

On en déduit encore $E(M_n) \geqslant KP([M_n > K])$.

b) ii) Soit $(K(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite croissante d'entiers tendant vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ et telle que $nq^{K(n)}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Alors, $q^{K(n)} = e^{K(n)\ln q}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ (car $\ln q < 0$) puis

$$\begin{aligned}K(n)P([M_n > K(n)]) &= K(n)\left(1 - \left(1 - q^{K(n)}\right)^n\right) = K(n)\left(1 - e^{n\ln\left(1-q^{K(n)}\right)}\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} K(n)\left(1 - e^{-nq^{K(n)}+o\left(nq^{K(n)}\right)}\right) \underset{n\to+\infty}{=} K(n)(1+o(1))\\ &\underset{n\to+\infty}{\to} +\infty.\end{aligned}$$

On choisit alors pour $(K(n))$ la suite $([\ln(n)])_{n\geqslant 2}$ (où $[\ ]$ est la partie entière). Puisque $\ln n + K(n)\ln q \underset{n\to+\infty}{\sim} (1+\ln q)\ln n$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} nq^{K(n)} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{\ln n + K(n)\ln q} = +\infty$ et donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} K(n)P([M_n > K(n)]) = +\infty$. Puisque pour tout $n \geqslant 2$, $E(M_n) \geqslant K(n)P([M_n > K(n)])$, on a montré que

$$\lim_{n\to+\infty} E(M_n) = +\infty.$$

2) a) D'après la question I.3.b.ii),

$$\begin{aligned}E(M_n) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P([M_n > k]) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(1 - \left(1-q^k\right)^n\right)\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(1 - \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\left(q^k\right)^i\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\binom{n}{i}\left(q^k\right)^i\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\binom{n}{i}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\left(q^i\right)^k\right) \text{ (somme de } n \text{ séries convergentes)}\\ &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\binom{n}{i}\frac{1}{1-q^i} \text{ (car pour } i \in [\![1,n]\!],\ q^i \in]0,1[).\end{aligned}$$

b) D'après la question I.3.d.ii), $E(M_n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P([M_n > t])\ dt$. Maintenant, puisque M_n est une variable à variables entières, pour tout réel positif t, $P([M_n > t]) = P([M_n > [t]])$ (que t soit entier ou pas). Donc,

$$E(M_n) = \int_0^{+\infty} P([M_n > t])\ dt = \int_0^{+\infty} P([M_n > [t]])\ dt = \int_0^{+\infty}\left(1 - \left(1 - q^{[t]}\right)^n\right)\ dt.$$

3) a) Soit $k \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto q^t(1-q^t)^k$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$. De plus, puisque $0 < q < 1$, $\lim\limits_{t\to+\infty} q^t = 0$ et donc $q^t(1-q^t)^k \underset{t\to+\infty}{\sim} q^t \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ d'après un théorème de croissances comparées. On en déduit que la fonction $t \mapsto q^t(1-q^t)^k$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et donc que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} q^t\left(1-q^t\right)^k\ dt$ est une intégrale convergente. De plus,

$$\int_0^{+\infty} q^t\left(1-q^t\right)^k\ dt = -\frac{1}{\ln q}\int_0^{+\infty}(-\ln q)q^t\left(1-q^t\right)^k\ dt = -\frac{1}{\ln q}\left[\frac{(1-q^t)^{k+1}}{k+1}\right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{(k+1)\ln q}.$$

b)

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\left(1 - (1-q^t)^n\right) dt &= \int_0^{+\infty} q^t\frac{1-(1-q^t)^n}{1-(1-q^t)}\ dt\\ &= \int_0^{+\infty} q^t\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-q^t\right)^k\ dt = \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{+\infty} q^t\left(1-q^t\right)^k\ dt\\ &= -\frac{1}{\ln q}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1} = -\frac{1}{\ln q}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\\ &= -\frac{H_n}{\ln q}.\end{aligned}$$

c) (i) Pour tout réel positif t, $[t] \leqslant t$ puis $t \ln q \leqslant [t] \ln q$ puis $e^{t \ln q} \leqslant e^{[t] \ln q}$ ou encore $q^t \leqslant q^{[t]} \leqslant 1$. Par suite, $0 \leqslant 1 - q^{[t]} \leqslant 1 - q^t$ puis $\left(1 - q^{[t]}\right)^n \leqslant (1 - q^t)^n$ et enfin,

$$\forall t \geqslant 0,\ 1 - (1 - q^t)^n \leqslant 1 - \left(1 - q^{[t]}\right)^n.$$

En intégrant, on obtient

$$E(M_n) = \int_0^{+\infty} \left(1 - \left(1 - q^{[t]}\right)^n\right) dt \geqslant \int_0^{+\infty} \left(1 - (1 - q^t)^n\right) dt = -\frac{H_n}{\ln q}.$$

De même, pour $t \geqslant 1$, $0 \leqslant t - 1 \leqslant [t]$ et donc

$$\begin{aligned}
E(M_n) &= \int_0^1 \left(1 - \left(1 - q^{[t]}\right)^n\right) dt + \int_1^{+\infty} \left(1 - \left(1 - q^{[t]}\right)^n\right) dt \\
&\leqslant \int_0^1 1\ dt + \int_1^{+\infty} \left(1 - (1 - q^{t-1})^n\right) dt \\
&= 1 + \int_0^{+\infty} (1 - (1 - q^u)^n)\ du \text{ (en posant } u = t - 1) \\
&= -\frac{H_n}{\ln q} + 1.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -\frac{H_n}{\ln q} \leqslant E(M_n) \leqslant -\frac{H_n}{\ln q} + 1.$$

On en déduit encore, après multiplication de chacun des membres de l'encadrement ci-dessus par le réel positif $-\dfrac{\ln q}{H_n}$, que pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$1 \leqslant -\frac{\ln q\ E(M_n)}{H_n} \leqslant 1 - \frac{\ln q}{H_n}.$$

D'après la question I.1.b), $H_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln n$ et en particulier $\lim\limits_{n \to +\infty} H_n = +\infty$. L'encadrement précédent et le théorème des gendarmes montre que

$$E(M_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{H_n}{\ln q} \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{\ln n}{\ln q}.$$

c) (ii) La question III.1.a.i) fournit en particulier $E(M_1) = \dfrac{1}{p}$. Soit $x \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - x \in]0, 1[$ de sorte que $p = 1 - q = x$. L'encadrement précédent fournit d'abord (d'après la question et puisque $-\ln q > 0$),

$$-\frac{1}{\ln q} = -\frac{H_1}{\ln q} \leqslant E(M_1) = \frac{1}{p}$$

puis $x = p \leqslant -\ln q = -\ln(1 - x)$ et finalement $\ln(1 - x) \leqslant -x$.

De même,

$$-\frac{1}{\ln(1 - x)} = -\frac{1}{\ln q} = -\frac{H_1}{\ln q} \geqslant E(M_1) - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1 - p}{p} = \frac{1 - x}{x}$$

et donc $-\dfrac{x}{1 - x} \leqslant \ln(1 - x)$.

4) a) (i) Soit $k \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto tq^t (1 - q^t)^k$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$, négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$ d'après un théorème de croissances comparées. On en déduit l'existence de α_k.

a) (ii) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Les deux fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto \dfrac{1 - (1 - q^t)^{k+1}}{(k + 1) \ln q}$ sont de classe C^1 sur $[0, +\infty[$. Au vu de la convergence des différentes intégrales, on peut effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\int_0^{+\infty} tq^t\left(1-q^t\right)^k\ dt = \left[t\frac{1-\left(1-q^t\right)^{k+1}}{(k+1)\ln q}\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{(k+1)\ln q}\int_0^{+\infty}\left(1-\left(1-q^t\right)^{k+1}\right)dt$$
$$= -\frac{1}{(k+1)\ln q}\int_0^{+\infty}\left(1-\left(1-q^t\right)^{k+1}\right)dt$$

($\lim\limits_{t\to+\infty} t\dfrac{1-\left(1-q^t\right)^{k+1}}{(k+1)\ln q} = 0$ d'après un théorème de croissances comparées). Donc, d'après la question III.3.b, $\alpha_k = -\dfrac{1}{(k+1)\ln q}\times -\dfrac{H_{k+1}}{\ln q} = \dfrac{1}{\ln^2 q}\times\dfrac{H_{k+1}}{k+1}$.

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\int_0^{+\infty} t\left(1-\left(1-q^t\right)^n\right)dt = \int_0^{+\infty} tq^t\frac{1-\left(1-q^t\right)^n}{1-\left(1-q^t\right)}\ dt$$
$$= \int_0^{+\infty} tq^t\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-q^t\right)^k\ dt = \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k$$
$$= \frac{1}{\ln^2 q}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{H_{k+1}}{k+1} = \frac{1}{\ln^2 q}\sum_{k=1}^{n}\frac{H_k}{k}.$$

Comme à la question III.3.c.i) et d'après la question I.3.e),

$$E\left(M_n^2\right) = 2\int_0^{+\infty} tq^{[t]}\left(1-\left(1-q^{[t]}\right)^n\right)dt$$
$$\geqslant 2\int_0^{+\infty} tq^t\left(1-\left(1-q^t\right)^n\right)dt$$
$$= \frac{2}{\ln^2 q}\sum_{k=1}^{n}\frac{H_k}{k}$$

et

$$E\left(M_n^2\right) = 2\int_0^1 tq^{[t]}\left(1-\left(1-q^{[t]}\right)^n\right)dt + 2\int_1^{+\infty} tq^{[t]}\left(1-\left(1-q^{[t]}\right)^n\right)dt$$
$$\leqslant 2\int_0^1 t\ dt + 2\int_1^{+\infty} tq^{t-1}\left(1-\left(1-q^{t-1}\right)^n\right)dt = 2+\int_0^{+\infty}(u+1)q^u\left(1-(1-q^u)^n\right)du$$
$$= 1+\int_0^{+\infty} uq^u\left(1-(1-q^u)^n\right)du + 2\int_0^{+\infty} q^u\left(1-(1-q^u)^n\right)du$$
$$= 1+\frac{2}{\ln^2 q}\sum_{k=1}^{n}\frac{H_k}{k} - 2\frac{H_n}{\ln q}.$$

c) Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$H_n^2 = \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) = \sum_{1\leqslant j,k\leqslant n}\frac{1}{jk} = 2\sum_{1\leqslant j\leqslant k\leqslant n}\frac{1}{jk} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\times k}$$
$$= 2\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{jk}\right) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}\right) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$$
$$= 2\sum_{k=1}^{n}\frac{H_k}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$$

d) D'après la question III.3.c.i),

$$\frac{H_n^2}{\ln^2 q} \leqslant (E(M_n))^2 \leqslant \left(-\frac{H_n}{\ln q}+1\right)^2 = \frac{H_n^2}{\ln^2 q} - 2\frac{H_n}{\ln q}+1$$

puis, d'après la formule de Koenig-Huygens,

$$\frac{2}{\ln^2 q}\sum_{k=1}^{n}\frac{H_k}{k} - \frac{H_n^2}{\ln^2 q} + 2\frac{H_n}{\ln q} - 1 \leqslant V(M_n) = E\left(M_n^2\right) - (E(M_n))^2 \leqslant 1 + \frac{2}{\ln^2 q}\sum_{k=1}^{n}\frac{H_k}{k} - 2\frac{H_n}{\ln q} - \frac{H_n^2}{\ln^2 q}$$

ou encore, avec l'égalité de la question précédente,

$$2\frac{H_n}{\ln q} - 1 + \frac{1}{\ln^2 q}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leqslant V(M_n) \leqslant -2\frac{H_n}{\ln q} + 1 + \frac{1}{\ln^2 q}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}.$$

La série de terme général $\frac{1}{k^2}$, $k \in \mathbb{N}^*$, converge et donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{=} O(1)$. Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty$, l'encadrement précédent fournit

$$V_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(-2\frac{H_n}{\ln q}\right) \underset{n\to+\infty}{=} O(\ln n).$$

Partie IV. Comportement asymptotique de la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

1) Soit $x \in]0,1[$. D'après la question IV.3.c.ii),

$$-\frac{x}{1-x} + x \leqslant x + \ln(1-x) \leqslant -x + x,$$

ou encore,

$$-\frac{x^2}{1-x} \leqslant x + \ln(1-x) \leqslant 0,$$

ce qui reste vrai pour $x = 0$.

2) Soit $(k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Déjà, $q^k \leqslant q < 1$ (car $q \in]0,1[$) et donc $\dfrac{nq^{2k}}{1-q^k}e^{-nq^k} \leqslant \dfrac{nq^{2k}}{1-q}e^{-nq^k}$.
Ensuite, le réel $x = q^k$ est dans $]0,1[$ et donc, d'après la question précédente,

$$-\frac{nq^{2k}}{1-q^k} \leqslant nq^k + n\ln\left(1-q^k\right) \leqslant 0$$

puis $e^{-\frac{nq^{2k}}{1-q^k}} \leqslant e^{nq^k}\left(1-q^k\right)^n \leqslant 1$ puis $e^{-nq^k}e^{-\frac{nq^{2k}}{1-q^k}} \leqslant \left(1-q^k\right)^n \leqslant e^{-nq^k}$ et donc

$$0 \leqslant e^{-nq^k} - \left(1-q^k\right)^n \leqslant e^{-nq^k}\left(1 - e^{-\frac{nq^{2k}}{1-q^k}}\right).$$

Enfin, il est connu que pour tout réel u, $e^u \geqslant 1+u$ (inégalité de convexité) et donc $1 - e^u \leqslant -u$. On en déduit donc que

$$0 \leqslant e^{-nq^k} - \left(1-q^k\right)^n \leqslant \frac{nq^{2k}}{1-q^k}e^{-nq^k}.$$

En résumé, $\left|e^{-nq^k} - \left(1-q^k\right)^n\right| \leqslant \dfrac{nq^{2k}}{1-q^k}e^{-nq^k} \leqslant \dfrac{nq^{2k}}{1-q}e^{-nq^k}$.

3) La fonction $f : x \mapsto x^2e^{-x}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et tend vers 0 en $+\infty$. D'après la question I.2, cette fonction est bornée sur $[0,+\infty[$. Soit M un majorant de $|f| = f$ sur $[0,+\infty[$

4) D'après la question III.1.a.ii), pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|P([M_n \leqslant k]) - e^{-nq^k}\right| = \left|\left(1-q^k\right)^n - e^{-nq^k}\right| \leqslant \frac{nq^{2k}}{1-q}e^{-nq^k} = \frac{1}{n(1-q)}n^2q^{2k}e^{-nq^k} = \frac{f\left(nq^k\right)}{n(1-q)} \leqslant \frac{M}{n(1-q)}.$$

Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\underset{k\in\mathbb{N}^*}{\mathrm{Sup}}\left|P([M_n \leqslant k]) - e^{nq^k}\right| \leqslant \frac{M}{n(1-q)}.$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \operatorname{Sup}\limits_{k\in\mathbb{N}^*} \left|P\left([M_n \leqslant k]\right) - e^{nq^k}\right| = 0$.

Partie V. Où l'on retrouve une formule exacte pour l'espérance de M_n

1) a) $E_{B_n}(M_n) = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} iP_{B_n}(M_n = i) = 1 \times P_{B_n}(M_n = 1) = 1 \times 1 = 1 = 1 + m_0$.

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Si B_k est réalisé, $M_n = \max(X_{k+1}, \ldots, X_n)$ puis $M_n - 1 = \max(X_{k+1} - 1, \ldots, X_n - 1)$. D'après la question I.5.b, le vecteur aléatoire $(X_{k+1} - 1, \ldots, X_n - 1)$ a même loi de probabilité pour P_{B_k} que le vecteur aléatoire $(X_{k+1}, \ldots, X_n)$. Donc,

$$E_{B_k}(M_n) - 1 = E_{B_k}(M_n - 1) = E\left(\max(X_{k+1}, \ldots, X_n)\right) = m_{n-k}$$

puis $E_{B_k}(M_n) = 1 + m_{n-k}$.

On a montré que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $E_{B_k}(M_n) = 1 + m_{n-k}$.

b) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. $P(B_k) = \left(\prod\limits_{i=1}^{k} P(X_i = 1)\right)\left(\prod\limits_{i=k+1}^{n} P(X_i > 1)\right) = \left(\prod\limits_{i=1}^{k} p\right)\left(\prod\limits_{i=k+1}^{n} (1-p)\right) = \prod\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}^n$.

Pour $k \in [\![0, n]\!]$, soit C_k l'événement « k des variables X_i sont égales à 1 et $n - k$ sont strictement plus grandes que 1 ». Il y a $\binom{n}{k}$ choix possibles des variables égales à 1 et pour chacun de ses choix, la probabilité de l'événement correspondant est $P(B_k)$. Donc $P(C_k) = \binom{n}{k} P(B_k) = \binom{n}{k}\frac{1}{2^n}$.

$(C_0, \ldots, C_n)$ est une partition de Ω et chacune des $P(C_i)$ est non nulle. D'après la formule de l'espérance totale,

$$E(M_n) = \sum_{k=0}^{n} P(C_k)\, E_{C_k}(M_n) = \sum_{k=0}^{n} P(C_k)\, E_{B_k}(M_n) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1 + m_{n-k}).$$

2) $m_0 = 0 \leqslant 2^0$. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $m_n \leqslant 2^n$.

- $m_1 = \frac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{1}\binom{1}{k}(1 + m_{1-k}) = \frac{1}{2}(1 + m_0 + 1 + m_1) = 1 + \frac{1}{2}m_1$ et donc $m_1 = 2 \leqslant 2^1$.

- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $m_k \leqslant 2^k$. Alors, (puisque $\sum\limits_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} = 2^{n+1}$),

$$m_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(1 + m_{n+1-k}) = 1 + \frac{m_{n+1}}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k} m_{n+1-k}$$

puis

$$\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) m_{n+1} \leqslant 1 + \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k} 2^{n+1-k} = \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} 2^{n+1-k} = \frac{1}{2^{n+1}}(1+2)^{n+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}.$$

Maintenant, la suite $\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)_{n\geqslant 1} = \left(\frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}}\right)_{n\geqslant 1}$ est croissante et strictement positive et donc la suite $\left(\frac{2^{n+1}}{2^{n+1} - 1}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante. On en déduit que pour $n \geqslant 1$, $\frac{2^{n+1}}{2^{n+1} - 1} \leqslant \frac{2^2}{2^2 - 1} = \frac{4}{3}$ puis que

$$m_{n+1} \leqslant \frac{2^{n+1}}{2^{n+1} - 1}\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \leqslant \frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} = \frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} 2^{n+1} = \left(\frac{3}{4}\right)^{n} 2^{n+1} \leqslant 2^{n+1}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m_n \leqslant 2^n$.

Soit alors $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|\frac{m_n x^n}{n!}\right| = \frac{m_n |x|^n}{n!} \leqslant \frac{(2|x|)^n}{n!}$. Puisque la série de terme général $\frac{(2|x|)^n}{n!}$ converge (et a pour somme $e^{2|x|}$), la série de terme général $\frac{m_n x^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$, converge absolument et donc converge.

On a montré que pour tout x réel, la série de terme général $\frac{m_n x^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$, converge.

3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a encore $2^n m_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} m_{n-k} = (1+1)^n + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} m_{n-k} = 2^n + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} m_{n-k}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
M(2x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} m_n (2x)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} 2^n m_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(2^n + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} m_{n-k} \right) x^n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x)^n}{n!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} m_{n-k} \right) x^n \\
&= e^{2x} - 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} m_{n-k} \right) x^n \text{ (car } m_0 = 0) \\
&= e^{2x} - 1 + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{m_n}{n!} x^n \right) \text{ (d'après la question I.4)} \\
&= e^{2x} - 1 + e^x M(x).
\end{aligned}$$

4) $G(0) = M(0) = m_0 = 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $G(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ G(2x) = 1 - e^{-2x} + G(x) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n a_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^n}{n!} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \\
&\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2^n a_n = \frac{(-1)^{n-1} 2^n}{n!} + a_n \text{ (par unicité des coefficients d'une série entière)} \\
&\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{1}{n!} \frac{(-1)^{n-1} 2^n}{2^n - 1} \text{ (pour } n \geqslant 1,\ 2^n \neq 1).
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout réel x, $G(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{(-1)^{n-1} 2^n}{2^n - 1} x^n$. Mais alors,

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ M(x) = G(x) e^x &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ M(x) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{(-1)^{n-1} 2^n}{2^n - 1} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n \right) \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m_n}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{2^k}{2^k - 1} \right) x^n \text{ (d'après la question I.4)} \\
&\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ m_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{2^k}{2^k - 1}.
\end{aligned}$$

Dans le cas où $p = q = \dfrac{1}{2}$, on retrouve ainsi le résultat de la question III.2 :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ m_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{2^k}{2^k - 1} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{1}{1 - q^k}.$$

