

Antilles Guyane 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 5 : corrigé

1) a) Les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AB} sont $(2, 0, 4)$ et les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AC} sont $(0, -1, 1)$.
Si il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, on a en particulier $-1 = 0k$ (en analysant la deuxième coordonnée) ce qui est impossible. Donc, les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas colinéaires ou encore les points A , B et C ne sont pas alignés.

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 0 + 0 \times (-1) + 4 \times 1 = 4$.

c) $AB = \sqrt{2^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$ et $AC = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Par suite,

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{4}{2\sqrt{5} \times \sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{10}}.$$

La calculatrice fournit alors $\widehat{BAC} = 51^\circ$ arrondi au degré.

2) a) Les points A , B et C ne sont pas alignés et donc les points A , B et C définissent un unique plan, le plan (ABC) .

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 2 \times 2 + 0 \times (-1) + 4 \times (-1) = 4 - 4 = 0,$$

et

$$\overrightarrow{AC} \cdot \vec{n} = 0 \times 2 + (-1) \times (-1) + 1 \times (-1) = 1 - 1 = 0.$$

Le vecteur \vec{n} est orthogonal aux vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) . Donc, le vecteur \vec{n} est un vecteur normal au plan (ABC) .

b) Le plan (ABC) est le plan passant par $A(-1, 2, 0)$ et de vecteur normal $\vec{n}(2, -1, -1)$. Une équation cartésienne du plan (ABC) est $2(x + 1) - (y - 2) - (z - 0) = 0$ ou encore $2x - y - z + 4 = 0$.

3) a) Un vecteur normal au plan \mathcal{P}'_2 d'équation $x - 2z + 6 = 0$ est le vecteur \vec{n}'_2 de coordonnées $(1, 0, -2)$. Puisque \mathcal{P}_2 est parallèle à \mathcal{P}'_2 , \vec{n}'_2 est encore un vecteur normal au plan \mathcal{P}_2 . Ainsi, \mathcal{P}_2 est le plan passant par $O(0, 0, 0)$ et de vecteur normal $\vec{n}'_2(1, 0, -2)$. Une équation cartésienne de \mathcal{P}_2 est donc $x - 2z = 0$ ou encore $x = 2z$.

b) Un vecteur normal au plan \mathcal{P}_1 d'équation $3x + y - 2z + 3 = 0$ est le vecteur \vec{n}'_1 de coordonnées $(3, 1, -2)$. Les vecteurs \vec{n}'_1 et \vec{n}'_2 ne sont pas colinéaires et donc les plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 ne sont pas parallèles. Par suite, les plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont sécants en une droite.

c) Puisque l'on sait que \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont sécants en une droite, il suffit de vérifier que tout point de \mathcal{D} est un point de $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.

Soit $M(2t, -4t - 3, t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite \mathcal{D} .

$$3x_M + y_M - 2z_M + 3 = 3(2t) + (-4t - 3) - 2(t) + 3 = 6t - 4t - 3 - 2t + 3 = 0$$

et donc M appartient à \mathcal{P}_1 . De même,

$$x_M - 2z_M = (2t) - 2(t) = 0$$

et donc M appartient à \mathcal{P}_2 . Ainsi, tout point de \mathcal{D} appartient à \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 et donc $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ est la droite \mathcal{D} .

4) Soit $M(2t, -4t - 3, t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite \mathcal{D} .

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow 2(2t) - (-4t - 3) - t + 4 = 0 \Leftrightarrow 7t + 7 = 0 \Leftrightarrow t = -1.$$

Quand $t = -1$, on obtient le point I de coordonnées $(-2, 1, -1)$. Le point I est le point d'intersection des plans (ABC) , \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 .