Antilles Guyane 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 5 (5 points) (Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.
On considère les points $A(-1;2;0)$, $B(1;2;4)$ et $C(-1;1;1)$.

1) a) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

c) Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$, arrondie au degré.

2) Soit $\overrightarrow{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

3) Soient $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation $3x + y - 2z + 3 = 0$ et $\mathscr{P}_2$ le plan passant par O et parallèle au plan d'équation $x - 2z + 6 = 0$.

a) Démontrer que le plan $\mathscr{P}_2$ a pour équation $x = 2z$.

b) Démontrer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.

c) Soit la droite $\mathscr{D}$ dont un système d'équations paramétriques est

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2t \\ y = -4t - 3 \\ z = t \end{array}\right. , \ t \in \mathbb{R}.$$

Démontrer que $\mathscr{D}$ est la droite d'intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

4) Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ coupe le plan (ABC) en un point I dont on déterminera les coordonnées.

Antilles Guyane 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 5 : corrigé

1) a) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(2, 0, 4)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $(0, -1, 1)$.
Si il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, on a en particulier $-1 = 0k$ (en analysant la deuxième coordonnée) ce qui est impossible. Donc, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires ou encore les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2 \times 0 + 0 \times (-1) + 4 \times 1 = 4$.

c) $AB = \sqrt{2^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$ et $AC = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Par suite,

$$\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{4}{2\sqrt{5} \times \sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{10}}.$$

La calculatrice fournit alors $\widehat{BAC} = 51°$ arrondi au degré.

2) a) Les points A, B et C ne sont pas alignés et donc les points A, B et C définissent un unique pan, le plan (ABC).

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n} = 2 \times 2 + 0 \times (-1) + 4 \times (-1) = 4 - 4 = 0,$$

et

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{n} = 0 \times 2 + (-1) \times (-1) + 1 \times (-1) = 1 - 1 = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC). Donc, le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

b) Le plan (ABC) est le plan passant par $A(-1, 2, 0)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(2, -1, -1)$. Une équation cartésienne du plan (ABC) est $2(x + 1) - (y - 2) - (z - 0) = 0$ ou encore $2x - y - z + 4 = 0$.

3) a) Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}'_2$ d'équation $x - 2z + 6 = 0$ est le vecteur $\overrightarrow{n_2}$ de coordonnées $(1, 0, -2)$. Puisque $\mathscr{P}_2$ est parallèle à $\mathscr{P}'_2$, $\overrightarrow{n_2}$ est encore un vecteur normal au plan $\mathscr{P}_2$. Ainsi, $\mathscr{P}_2$ est le plan passant par $O(0, 0, 0)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n_2}(1, 0, -2)$. Une équation cartésienne de $\mathscr{P}_2$ est donc $x - 2z = 0$ ou encore $x = 2z$.

b) Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}_1$ d'équation $3x + y - 2z + 3 = 0$ est le vecteur $\overrightarrow{n_1}$ de coordonnées $(3, 1, -2)$. Les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires et donc les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ne sont pas parallèles. Par suite, les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants en une droite.

c) Puisque l'on sait que $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants en une droite, il suffit de vérifier que tout point de $\mathscr{D}$ est un point de $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$.

Soit $M(2t, -4t - 3, t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite $\mathscr{D}$.

$$3x_M + y_M - 2z_M + 3 = 3(2t) + (-4t - 3) - 2(t) + 3 = 6t - 4t - 3 - 2t + 3 = 0$$

et donc M appartient à $\mathscr{P}_1$. De même,

$$x_M - 2z_M = (2t) - 2(t) = 0$$

et donc M appartient à $\mathscr{P}_2$. Ainsi, tout point de $\mathscr{D}$ appartient à $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ et donc $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$ est la droite $\mathscr{D}$.

4) Soit $M(2t, -4t - 3, t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite $\mathscr{D}$.

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow 2(2t) - (-4t - 3) - t + 4 = 0 \Leftrightarrow 7t + 7 = 0 \Leftrightarrow t = -1.$$

Quand $t = -1$, on obtient le point I de coordonnées $(-2, 1, -1)$. Le points I est le point d'intersection des plans (ABC), $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

