Antilles Guyane 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (commun à tous les candidats)

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel strictement positif.
Le but de l'exercice est d'étudier l'équation

$$(E_n)\ :\ \frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{n}$$

ayant pour inconnue le nombre réel strictement positif x.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
On a donné en **ANNEXE**, qui n'est pas à rendre, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthogonal.

1) Etudier les variations de la fonction f.

2) Déterminer son maximum.

Partie B

1) Montrer que, pour $n \geqslant 3$, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ possède une unique solution sur $[1;e]$ notée α_n.

2) D'après ce qui précède, pour tout entier $n \geqslant 3$, le nombre réel α_n est solution de l'équation (E_n).

a) Sur le graphique sont tracées les droites D_3, D_4 et D_5 d'équations respectives $y = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{4}$ et $y = \frac{1}{5}$.
Conjecturer le sens de variation de la suite (α_n).

b) Comparer, pour tout entier $n \geqslant 3$, $f(\alpha_n)$ et $f(\alpha_{n+1})$.
Déterminer le sens de variation de la suite (α_n).

c) En déduire que la suite (α_n) converge.
Il n'est pas demandé de calculer sa limite.

3) On admet que, pour tout entier $n \geqslant 3$, l'équation (E_n) possède une autre solution β_n telle que

$$1 \leqslant \alpha_n \leqslant e \leqslant \beta_n.$$

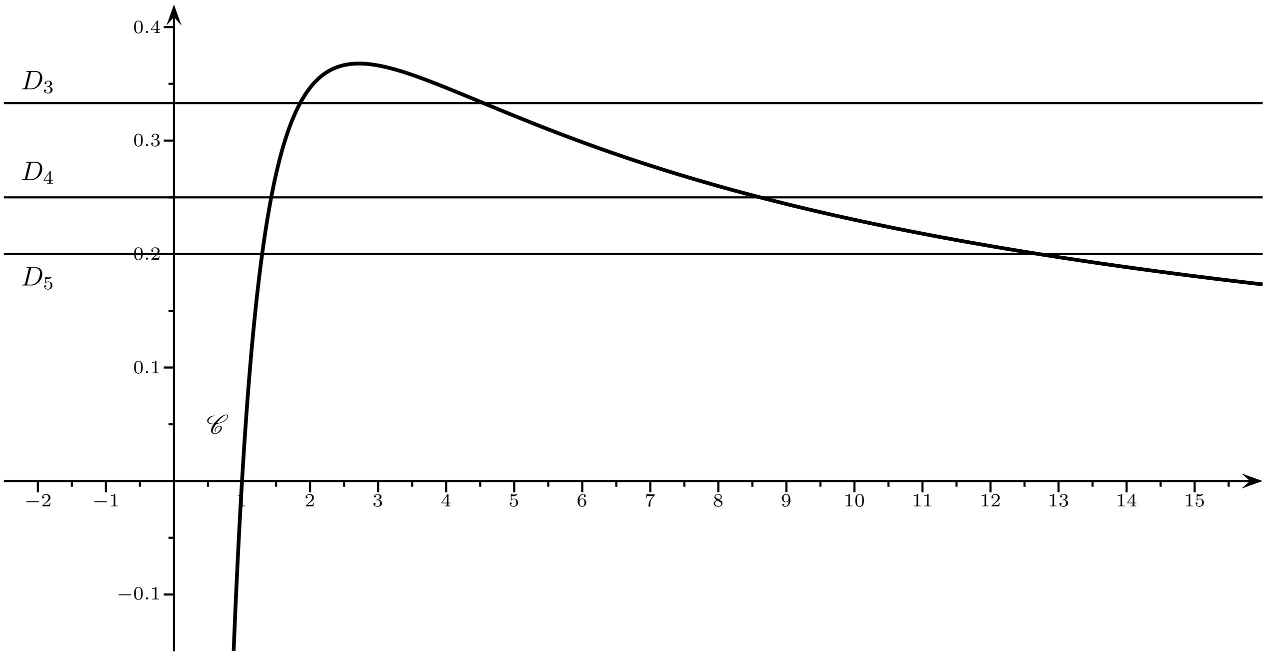
a) On admet que la suite (β_n) est croissante.
Etablir que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3,

$$\beta_n \geqslant n\frac{\beta_3}{3}.$$

b) En déduire la limite de la suite (β_n).

Annexe de l'exercice 4

Cette annexe n'est pas à rendre



Antilles Guyane 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

Partie A

1) Pour $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

Pour tout réel $x > 0$, $x^2 > 0$ et donc $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln(x)$. Or, par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$,

$$1 - \ln(x) > 0 \Leftrightarrow -\ln(x) > -1 \Leftrightarrow \ln(x) < 1 \Leftrightarrow x < e$$

et de même, $1 - \ln(x) < 0 \Leftrightarrow x > e$ et $1 - \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$. La fonction f' est strictement positive sur $]0, e[$, strictement négative sur $]e, +\infty[$ et s'annule en e. Donc, la fonction f est strictement croissante sur $]0, e]$ et strictement décroissantes sur $[e, +\infty[$.

2) La fonction f admet un maximum en e et ce maximum est

$$f(e) = \frac{\ln(e)}{e} = \frac{1}{e}.$$

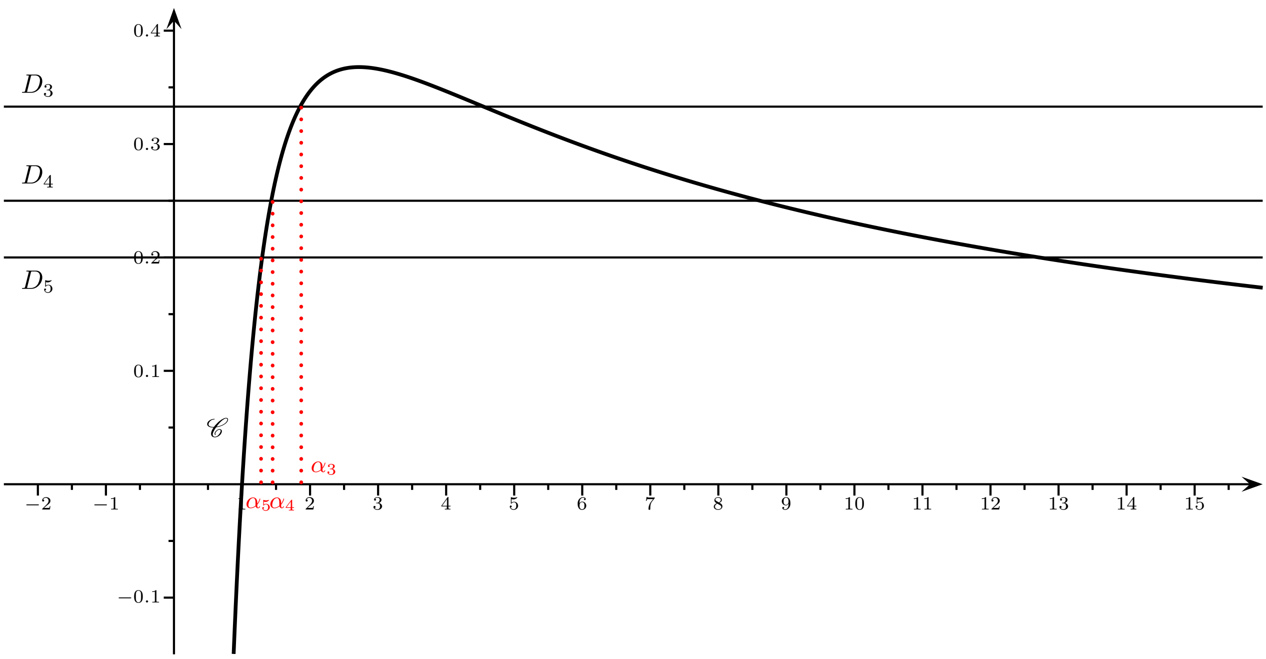
Partie B

1) Soit $n \geqslant 3$. Donc, $n > e$ puis $0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{e}$.

La fonction f est continue et strictement croissante sur $[1, e]$. Donc, pour tout réel k de $[f(1), f(e)] = \left[0, \frac{1}{e}\right]$, il existe un réel x et un seul de $[1, e]$ tel que $f(x) = k$. En particulier, il existe un réel α_n de $[1, e]$ et un seul tel que $f(\alpha_n) = \frac{1}{n}$.

Ceci montre que l'équation (E_n) admet une solution et une seule, notée α_n, dans $[1, e]$.

2) a) α_n est la plus petite des deux abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite d'équation $y = \frac{1}{n}$. Sur le graphique, il semble que α_n aille en diminuant quand n augmente ou encore il semble que la suite $(\alpha_n)_{n \geqslant 3}$ soit décroissante.



b) Soit $n \geqslant 3$. Par définition, $f(\alpha_n) = \frac{1}{n}$ et $f(\alpha_{n+1}) = \frac{1}{n+1}$. Donc, $f(\alpha_{n+1}) < f(\alpha_n)$ (et $1 \leqslant \alpha_n \leqslant e$ et $1 \leqslant \alpha_{n+1} \leqslant e$). Puisque la fonction f est strictement croissante sur $[1, e]$, on en déduit que $\alpha_{n+1} < \alpha_n$.

Ainsi, pour tout $n \geqslant 3$, $\alpha_{n+1} < \alpha_n$ et donc la suite $(\alpha_n)_{n \geqslant 3}$ est strictement décroissante.

c) La suite $(\alpha_n)_{n \geqslant 3}$ est décroissante et est minorée par 1. Donc, la suite $(\alpha_n)_{n \geqslant 3}$ converge.

3) a) Par définition, pour tout $n \geqslant 3$, $\dfrac{\ln(\beta_n)}{\beta_n} = \dfrac{1}{n}$ ou encore $\ln(\beta_n) = \dfrac{\beta_n}{n}$. En particulier, $\ln(\beta_3) = \dfrac{\beta_3}{3}$. Puisque la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 3}$ est croissante, on en déduit que pour $n \geqslant 3$, $\beta_n \geqslant \beta_3$ puis, par stricte croissance de la fonction ln, sur $]0, +\infty[$, $\ln(\beta_n) \geqslant \ln(\beta_3)$ et donc $\dfrac{\beta_n}{n} \geqslant \dfrac{\beta_3}{3}$.

Finalement, $\beta_n \geqslant n\dfrac{\beta_3}{3}$.

b) Puisque $\dfrac{\beta_3}{3} > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\dfrac{\beta_3}{3} > 0$. Puisque pour tout $n \geqslant 3$, $\beta_n \geqslant n\dfrac{\beta_3}{3}$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = +\infty$.

