

Antilles Guyane 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

1) a) La probabilité demandée est $P(22,8 \leq X \leq 27,2)$.

$27,2 = 25 + 2,2 = \mu_1 + 2,2$ et $22,8 = 25 - 2,2 = \mu_1 - 2,2$. Pour des raisons de symétrie,

$$P(22,8 \leq X \leq 27,2) = 1 - P(X < 22,8) - P(X > 27,2) = 1 - 2P(X > 27,2) = 1 - 2 \times 0,023 = 0,954.$$

b) $P(X \leq 27,2) = 1 - 0,023 = 0,977$. Or, $X \leq 27,2 \Leftrightarrow X - 25 \leq 2,2 \Leftrightarrow \frac{X - 25}{\sigma_1} \leq \frac{2,2}{\sigma_1}$ et donc

$$P\left(\frac{X - 25}{\sigma_1} \leq \frac{2,2}{\sigma_1}\right) = 0,977$$

où de plus la variable $\frac{X - 25}{\sigma_1}$ suit la loi normale centrée réduite. La calculatrice fournit $\frac{2,2}{\sigma_1} = 1,995\dots$ et donc $\sigma_1 = \frac{2,2}{1,995\dots} = 1,1$ à 10^{-1} près par défaut.

c) La probabilité demandée est $P_{22,8 \leq X \leq 27,2}(X \leq 24)$.

$$P_{22,8 \leq X \leq 27,2}(X \leq 24) = \frac{P((22,8 \leq X \leq 27,2) \cap (X \leq 24))}{P(22,8 \leq X \leq 27,2)} = \frac{P(22,8 \leq X \leq 24)}{P(22,8 \leq X \leq 27,2)}.$$

La calculatrice fournit $P_{22,8 \leq X \leq 27,2}(X \leq 24) = 0,166$ arrondi à 10^{-3} .

2) a) $P(22,8 \leq X \leq 27,2)$ a augmenté et donc $\sigma_2 < \sigma_1$.

b) Ici, $n = 500$ et on fait l'hypothèse que $p = 0,98$. On note que $n \geq 30$ puis $np = 490 \geq 5$ et $n(1 - p) = 10 \geq 5$. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% est

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right] = \left[0,98 - 1,96\sqrt{\frac{0,98 \times 0,02}{500}}; 0,98 + 1,96\sqrt{\frac{0,98 \times 0,02}{500}} \right] = [0,967; 0,993]$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle. La fréquence observée est $f = \frac{500 - 15}{500} = 0,97$. f appartient à l'intervalle de fluctuation et donc, on ne peut pas rejeter l'affirmation de l'équipe d'ingénieurs.