Antilles Guyane 2017. Enseignement spécifique

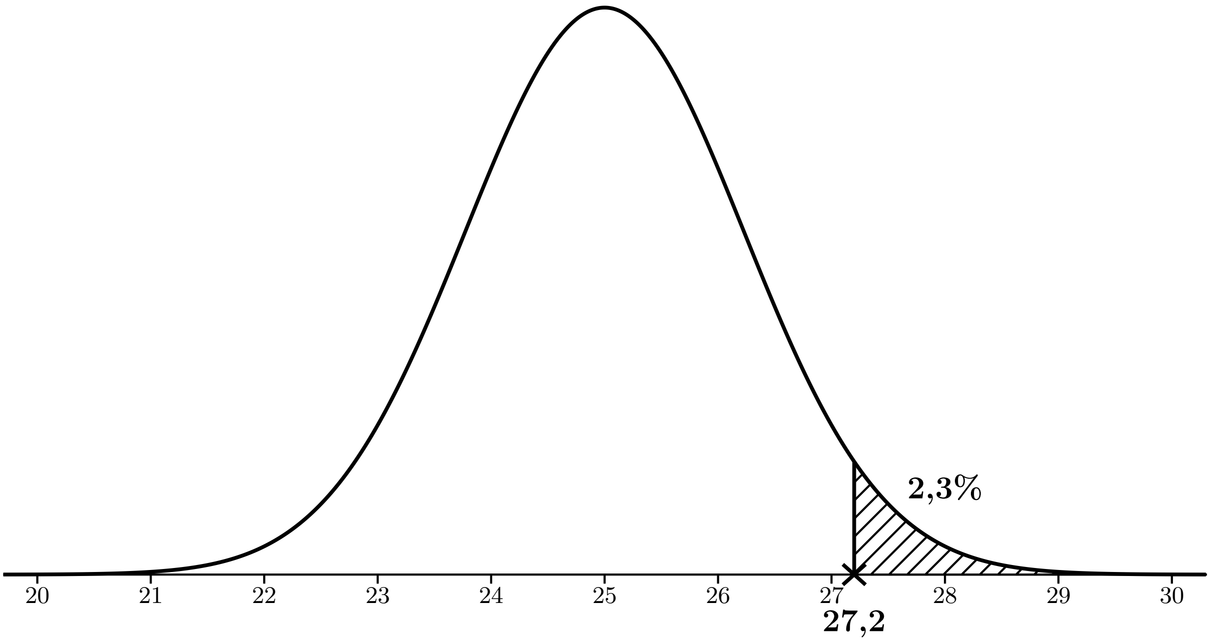
EXERCICE 2 (4 points) (commun à tous les candidats)

Dans une usine automobile, certaines pièces métalliques sont recouvertes d'une fine couche de nickel qui les protège contre la corrosion et l'usure. Le procédé utilisé est un nickelage par électrolyse.

On admet que la variable aléatoire X, qui à chaque pièce traitée associe l'épaisseur de nickel déposé, suit la loi normale d'espérance $\mu_1 = 25$ micromètres (μm) et d'écart-type σ_1.

Une pièce est conforme si l'épaisseur de nickel déposé est comprise entre $22,8$ μm et $27,2$ μm.

La fonction densité de probabilité de X est représentée ci-dessous.



On a pu déterminer que $P(X > 27,2) = 0,023$.

1) a) Déterminer la probabilité qu'une pièce soit conforme.

b) Justifier que $1,1$ est une valeur approchée de σ_1 à 10^{-1} près.

c) Sachant qu'une pièce est conforme, calculer la probabilité que l'épaisseur de nickel déposé sur celle-ci soit inférieure à 24 μm. Arrondir à 10^{-3}.

2) Une équipe d'ingénieurs propose un autre procédé de nickelage, obtenu par réaction chimique sans aucune source de courant. L'équipe affirme que ce nouveau procédé permet théoriquement d'obtenir 98% de pièces conformes. La variable aléatoire Y qui, à chaque pièce traitée avec ce nouveau procédé, associe l'épaisseur de nickel déposé suit la loi normale d'espérance $\mu_2 = 25$ mm et d'écart-type σ_2.

a) En admettant l'affirmation ci-dessus, comparer σ_1 et σ_2.

b) Un contrôle de qualité évalue le nouveau procédé ; il révèle que sur 500 pièces testées, 15 sont non conformes. Au seuil de 95%, peut-on rejeter l'affirmation de l'équipe d'ingénieurs ?

Antilles Guyane 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

1) a) La probabilité demandée est $P(22,8 \leqslant X \leqslant 27,2)$.
$27,2 = 25 + 2,2 = \mu_1 + 2,2$ et $22,8 = 25 - 2,2 = \mu_1 - 2,2$. Pour des raisons de symétrie,

$$P(22,8 \leqslant X \leqslant 27,2) = 1 - P(X < 22,8) - P(X > 27,2) = 1 - 2P(X > 27,2) = 1 - 2 \times 0,023 = 0,954.$$

b) $P(X \leqslant 27,2) = 1 - 0,023 = 0,977$. Or, $X \leqslant 27,2 \Leftrightarrow X - 25 \leqslant 2,2 \Leftrightarrow \dfrac{X-25}{\sigma_1} \leqslant \dfrac{2,2}{\sigma_1}$ et donc

$$P\left(\frac{X-25}{\sigma_1} \leqslant \frac{2,2}{\sigma_1}\right) = 0,977$$

où de plus la variable $\dfrac{X-25}{\sigma_1}$ suit la loi normale centrée réduite. La calculatrice fournit $\dfrac{2,2}{\sigma_1} = 1,995\ldots$ et donc $\sigma_1 = \dfrac{2,2}{1,995\ldots} = 1,1$ à 10^{-1} près par défaut.

c) La probabilité demandée est $P_{22,8 \leqslant X \leqslant 27,2}(X \leqslant 24)$.

$$P_{22,8 \leqslant X \leqslant 27,2}(X \leqslant 24) = \frac{P((22,8 \leqslant X \leqslant 27,2) \cap (X \leqslant 24))}{P(22,8 \leqslant X \leqslant 27,2)} = \frac{P(22,8 \leqslant X \leqslant 24)}{P(22,8 \leqslant X \leqslant 27,2)}.$$

La calculatrice fournit $P_{22,8 \leqslant X \leqslant 27,2}(X \leqslant 24) = 0,166$ arrondi à 10^{-3}.

2) a) $P(22,8 \leqslant X \leqslant 27,2)$ a augmenté et donc $\sigma_2 < \sigma_1$.

b) Ici, $n = 500$ et on fait l'hypothèse que $p = 0,98$. On note que $n \geqslant 30$ puis $np = 490 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 10 \geqslant 5$. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% est

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] = \left[0,98 - 1,96\sqrt{\frac{0,98 \times 0,02}{500}}; 0,98 + 1,96\sqrt{\frac{0,98 \times 0,02}{500}}\right] = [0,967; 0,993]$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle. La fréquence observée est $f = \dfrac{500 - 15}{500} = 0,97$. f appartient à l'intervalle de fluctuation et donc, on ne peut pas rejeter l'affirmation de l'équipe d'ingénieurs.

