Antilles Guyane 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (3 points) (commun à tous les candidats)

On munit le plan d'un repère orthonormé direct. On considère l'équation :

$$(E)\ :\ z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0$$

ayant pour inconnue le nombre complexe z.

1) Donner une solution entière de (E).

2) Démontrer que, pour tout nombre complexe z,

$$z^4 + 2z^3 - z - 2 = \left(z^2 + z - 2\right)\left(z^2 + z + 1\right).$$

3) Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

4) Les solutions de l'équation (E) sont les affixes de quatre points A, B, C, D du plan complexe tels que $ABCD$ est un quadrilatère non croisé.
Le quadrilatère $ABCD$ est-il un losange ? Justifier.

Antilles Guyane 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

1) $1^4 + 2 \times 1^3 - 1 - 2 = 1 + 2 - 1 - 2 = 0$. Donc, 1 est une solution entière de l'équation (E).

2) Pour tout nombre complexe z,

$$\left(z^2 + z - 2\right)\left(z^2 + z + 1\right) = z^4 + z^3 + z^2 + z^3 + z^2 + z - 2z^2 - 2z - 2 = z^4 + 2z^3 - z - 2.$$

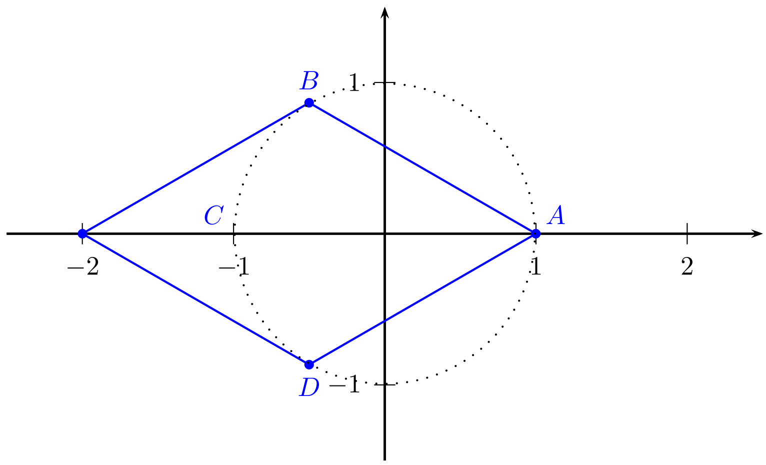
3) Soit z un nombre complexe. $z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(z^2 + z - 2\right)\left(z^2 + z + 1\right) = 0 \Leftrightarrow z^2 + z - 2 = 0$ ou $z^2 + z + 1 = 0$.

• Le discriminant de l'équation $z^2 + z - 2 = 0$ est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$. L'équation $z^2 + z - 2 = 0$ admet deux solutions réelles distinctes à savoir $z_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{9}}{2} = 1$ et $z_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{9}}{2} = -2$.

• Le discriminant de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$. Δ est strictement négatif et donc l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ admet deux solutions non réelles conjuguées à savoir $z_3 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ et $z_4 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$.

Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0$ sont 1, -2, $-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

4) On note A, B, C et D les points d'affixes respectives $a = 1$, $b = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $c = -2$ et $d = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



Les coordonnées respectives des points A, B, C et D sont $(1, 0)$, $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $(-2, 0)$ et $\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et le vecteur $\overrightarrow{DC}$ a pour coordonnées $\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Ainsi, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et donc le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(-3, 0)$ et le vecteur $\overrightarrow{BD}$ a pour coordonnées $\left(0, -\sqrt{3}\right)$. Ensuite,

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = (-3) \times 0 + 0 \times \left(-\sqrt{3}\right) = 0.$$

Les diagonales du parallélogramme $ABCD$ sont perpendiculaires et donc le parallélogramme $ABCD$ est un losange.

