

Amérique du sud 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 5 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Un biologiste souhaite étudier l'évolution de la population d'une espèce animale dans une réserve. Cette population est estimée à 12 000 individus en 2016. Les contraintes du milieu naturel font que la population ne peut pas dépasser les 60 000 individus.

Partie A : un premier modèle

Dans une première approche, le biologiste estime que la population croît de 5 % par an.

L'évolution annuelle de la population est ainsi modélisée par une suite (v_n) où v_n représente le nombre d'individus, exprimé en milliers, en 2016 + n . On a donc $v_0 = 12$.

- 1) Déterminer la nature de la suite (v_n) et donner l'expression de v_n en fonction de n .
- 2) Ce modèle répond-il aux contraintes du milieu naturel ?

Partie B : un second modèle

Le biologiste modélise ensuite l'évolution annuelle de la population par une suite (u_n) définie par $u_0 = 12$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = -\frac{1,1}{605}u_n^2 + 1,1u_n$.

- 1) On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par

$$g(x) = -\frac{1,1}{605}x^2 + 1,1x.$$

- a) Justifier que g est croissante sur $[0 ; 60]$.
- b) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $g(x) = x$.
- 2) On remarquera que $u_{n+1} = g(u_n)$.
 - a) Calculer la valeur arrondie à 10^{-3} de u_1 . Interpréter.
 - b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq 55$.
 - c) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
 - d) En déduire la convergence de la suite (u_n) .
 - e) On admet que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $g(\ell) = \ell$. En déduire sa valeur et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.
- 3) Le biologiste souhaite déterminer le nombre d'années au bout duquel la population dépassera les 50 000 individus avec ce second modèle. Il utilise l'algorithme suivant.

Variables	n un entier naturel u un nombre réel
Traitement	n prend la valeur 0 u prend la valeur 12 Tant Que u prend la valeur n prend la valeur Fin Tant Que
Sortie	Afficher

Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il affiche en sortie le plus petit entier r tel que $u_r \geq 50$.