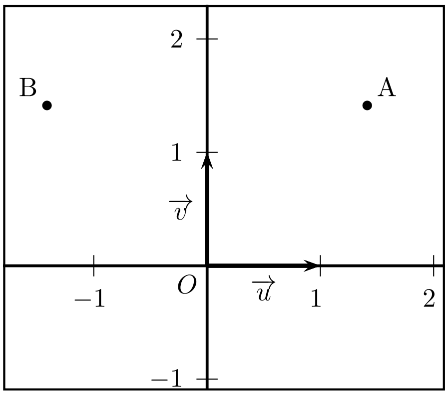
Amérique du sud 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (3 points) (commun à tous les candidats)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_B = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$.



1) Montrer que OAB est un triangle rectangle isocèle.

2) On considère l'équation

$$(E)\ :\ z^2 - \sqrt{6}\,z + 2 = 0.$$

Montrer qu'une des solutions de (E) est l'affixe d'un point situé sur le cercle circonscrit au triangle OAB.

Amérique du sud 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

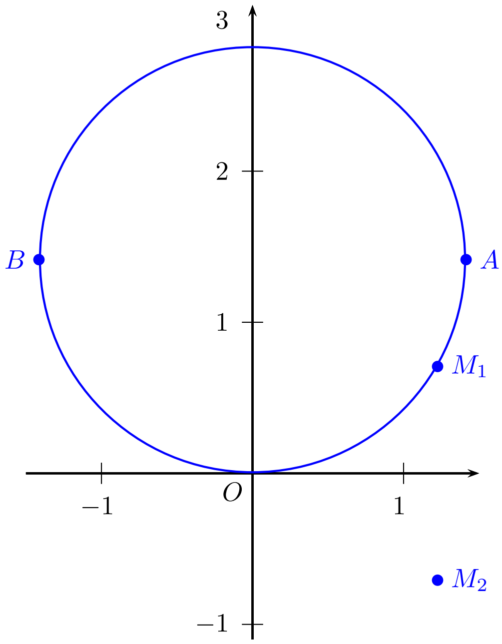
1) $OA = |z_A| = \left|2e^{i\frac{\pi}{4}}\right| = |2|\left|e^{i\frac{\pi}{4}}\right| = 2 \times 1 = 2$ et de même, $OB = |z_B| = 2$.
Ainsi, $OA = OB = 2$ et donc le triangle OAB est isocèle en O.

$z_A - z_B = 2\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = 2 \times \frac{2\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$. Donc,

$$BA^2 = |z_A - z_B|^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8 = 2^2 + 2^2 = OA^2 + OB^2.$$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle OAB est rectangle en O.

2) Le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = \left(-\sqrt{6}\right)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -2 < 0$. L'équation (E) admet deux solutions non réelles conjuguées $z_1 = \frac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$. On note M_1 le point d'affixe z_1 et M_2 le point d'affixe z_2.



Le triangle OAB est rectangle en O. Donc, le cercle circonscrit au triangle OAB est le cercle de diamètre $[AB]$ ou encore le cercle de centre Ω le milieu de $[AB]$ et de rayon $R = \frac{AB}{2} = \sqrt{2}$. L'affixe de Ω est

$$z_\Omega = \frac{1}{2}(z_A + z_B) = \frac{1}{2}\left(2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = i\sqrt{2}.$$

Par suite,

$$\Omega M_1 = |z_{M_1} - z_\Omega| = \left|\frac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2} - i\sqrt{2}\right| = \left|\frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}\right| = \frac{1}{2}\left|\sqrt{6} - i\sqrt{2}\right|$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2 + \left(-\sqrt{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} = R.$$

Donc, le point M_1 appartient au cercle circonscrit au triangle OAB.

