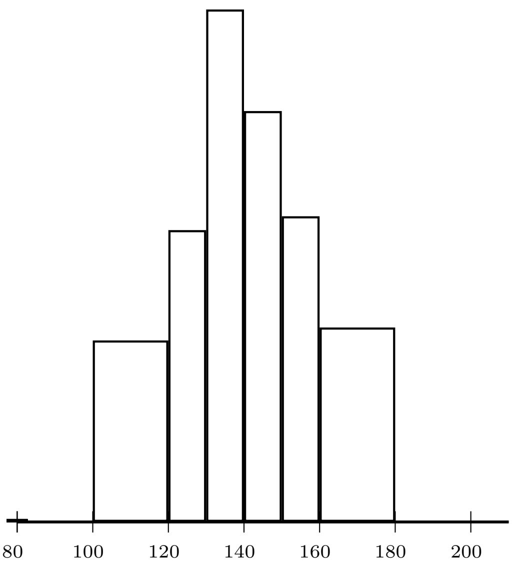
Amérique du sud 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (3 points) (commun à tous les candidats)

Partie A :

Un organisme de contrôle sanitaire s'intéresse au nombre de bactéries d'un certain type contenues dans la crème fraîche. Pour cela, il effectue des analyses portant sur 10 000 prélèvements de 1 ml de crème fraîche dans l'ensemble de la production française.
Les résultats sont donnés dans le tableau et représentés dans l'histogramme ci-dessous :

Nombre de bactéries (en milliers)	[100 ; 120[	[120 ; 130[	[130 ; 140[	[140 ; 150[	[150 ; 160[	[160 ; 180[
Nombre de prélèvements	1 597	1 284	2 255	1 808	1 345	1 711



A l'aide de la calculatrice, donner une estimation de la moyenne et de l'écart-type du nombre de bactéries par prélèvement.

Partie B :

L'organisme décide alors de modéliser le nombre de bactéries étudiées (en milliers par ml) présentes dans la crème fraîche par une variable aléatoire X suivant la loi normale de paramètres $\mu = 140$ et $\sigma = 19$.

1) a) Ce choix de modélisation est-il pertinent ? Argumenter.

b) On note $p = P(X \geqslant 160)$. Déterminer la valeur arrondie de p à 10^{-3}.

2) Lors de l'inspection d'une laiterie, l'organisme de contrôle sanitaire analyse un échantillon de 50 prélèvements de 1 ml de crème fraîche dans la production de cette laiterie. 13 prélèvements contiennent plus de 160 milliers de bactéries.

a) L'organisme déclare qu'il y a une anomalie dans la production et qu'il peut l'affirmer en ayant une probabilité de 0,05 de se tromper. Justifier sa déclaration.

b) Aurait-il pu l'affirmer avec une probabilité de $0,01$ de se tromper ?

Amérique du sud 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

Partie A

On assimile chaque classe à son milieu. Donc, la moyenne est

$$m = \frac{110 \times 1597 + 125 \times 1284 + 135 \times 2255 + 145 \times 1808 + 155 \times 1345 + 170 \times 1711}{1597 + 1284 + 2255 + 1808 + 1345 + 1711} = 140,21$$

et

$$\sigma = \sqrt{\frac{1597(110 - 140,21)^2 + 1284(125 - 140,21)^2 + 2255(135 - 140,21)^2 + 1808(145 - 140,21)^2 + \ldots}{1597 + 1284 + 2255 + 1808 + 1345 + 1711}} = 19,16.$$

Partie B

1) a) La modélisation semble pertinente au vu des valeurs de μ et σ obtenues expérimentalement dans la partie A.

b) La calculatrice fournit $p = P(X \geqslant 60) = 0,146$ arrondi à 10^{-3}.

2) a) Ici, $n = 50$ et $p = 0,146$. On note que $n \geqslant 30$, $np = 7,3 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 42,7 \geqslant 5$. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% est

$$\begin{aligned}\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] &= \left[0,146 - 1,96\sqrt{\frac{0,146 \times 0,854}{50}}; 0,146 + 1,96\sqrt{\frac{0,146 \times 0,854}{50}}\right] \\ &= [0,048; 0,244]\end{aligned}$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle. La fréquence observée est $f = \dfrac{13}{50} = 0,26$. Cette fréquence n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation et donc, au risque de se tromper de 5%, l'organisme peut affirmer qu'il y a une anomalie dans la production.

b) Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 99% est obtenu en remplaçant $u_{0,05} = 1,96$ par $u_{0,01} = 2,58$ ($u_{0,01}$ obtenu à la calculatrice à partir de $P\left(-u_{0,01} \leqslant X \leqslant u_{0,01}\right) = 1 - 0,01$ ou encore $P\left(X \leqslant u_{0,01}\right) = 0,995$).

$$\begin{aligned}\left[p - 2,58\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + 2,58\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] &= \left[0,146 - 2,58\sqrt{\frac{0,146 \times 0,854}{50}}; 0,146 + 2,58\sqrt{\frac{0,146 \times 0,854}{50}}\right] \\ &= [0,017; 0,275]\end{aligned}$$

Cette fois-ci, f appartient à l'intervalle et on ne peut donc rien affirmer au risque de se tromper de 1%.

