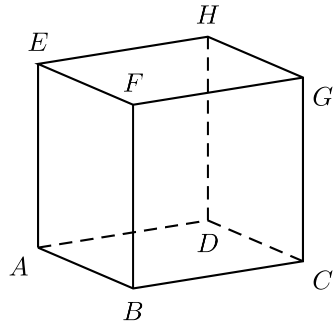
Amérique du sud 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (4 points) (commun à tous les candidats)



On considère un cube $ABCDEFGH$.

1) a) Simplifier le vecteur $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$.

b) En déduire que $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD} = 0$.

c) On admet que $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BE} = 0$.
Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).

2) L'espace est muni du repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.

a) Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (BDE) est $x + y + z - 1 = 0$.

b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection K de la droite (AG) et du plan (BDE).

c) On admet que l'aire, en unité d'aire, du triangle BDE est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Calculer le volume de la pyramide $BDEG$.

Amérique du sud 2017. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

1) a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG}$.

b) $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}\right).\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BD}$.

$[AC]$ et $[BD]$ sont les diagonales du carré $ABCD$ et donc $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 0$.
D'autre part, la droite (AE) est perpendiculaire aux droites (AB) et (AD) qui sont deux droites sécantes du plan (ABD). On en déduit que la droite (AE) est perpendiculaire au plan (ABD). Mais alors, la droite (AE) est orthogonale à toute droite du plan (ABD) et en particulier, la droite (AE) est orthogonale à la droite (BD). Ceci fournit $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BD} = 0$.

Finalement, $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BD} = 0 + 0 = 0$.

c) La droite (AG) est orthogonale aux droites (BD) et (BE) qui sont deux droites sécantes du plan (BDE). Donc, la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).

2) a) Dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$, le point A a pour coordonnées $(0, 0, 0)$ et le point G a pour coordonnées $(1, 1, 1)$ (car $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = 1\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AD} + 1\overrightarrow{AE}$). Donc, le vecteur $\overrightarrow{AG}$ a pour coordonnées $(1, 1, 1)$.

Le plan (BDE) est le plan passant par $B(1, 0, 0)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{AG}(1, 1, 1)$. Une équation cartésienne de ce plan est $1 \times (x - 1) + 1 \times (y - 0) + 1 \times (z - 0) = 0$ ou encore $x + y + z - 1 = 0$.

b) La droite (AG) est la droite passant par $A(0, 0, 0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{AG}(1, 1, 1)$. Une représentation paramétrique de la droite (AG) est $\left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = t \\ z = t \end{array}\right)$, $t \in \mathbb{R}$. Soit donc $M(t, t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite (AG).

$$M \in (BDE) \Leftrightarrow t + t + t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}.$$

Quand $t = \frac{1}{3}$, on obtient le point K de coordonnées $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

c) GK est donc la hauteur de la pyramide $BDGE$ associée à la base BDE. Ainsi, le volume de la pyramide $V = \frac{1}{3} \times GK \times \text{aire de } BDE$.

$GK = \sqrt{\left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 1\right)^2} = \sqrt{3\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Donc,

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3}.$$

