CONCOURS D'ENTRÉE
CYCLE INGENIEUR

<u>EPREUVE : MATHEMATIQUES</u>

MP / PC / PSI

Samedi 15 Avril 2017

Durée : 3 Heures

Condition(s) particulière(s)

Calculatrice interdite

Dans tout ce problème, on désigne par α un nombre réel *positif*, et on se propose d'étudier la fonction f définie par l'intégrale suivante lorsque celle-ci est convergente :

$$f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t.$$

On se propose d'approfondir dans la partie I l'absolue convergence, puis la convergence de l'intégrale $f(\alpha)$, ce qui permet d'obtenir le domaine de définition de f. Puis on étudie dans les parties II et III le comportement de f au voisinage de 0 et 2. Enfin, dans la partie IV (qui est indépendante des précédentes), on calcule l'intégrale $f(1)$.

■ PARTIE I : Absolue convergence et convergence de l'intégrale $f(\alpha)$

Dans cette partie, on étudie la convergence de $f(\alpha)$ à l'aide des deux intégrales suivantes :

$$I(\alpha) = \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t \quad ; \quad J(\alpha) = \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t$$

1°) *Etude de la convergence de l'intégrale $I(\alpha)$*

a) Donner un équivalent de la fonction $t \longrightarrow \frac{\sin(t)}{t^\alpha}$ quand t tend vers 0.

b) En déduire pour quelles valeurs du réel α l'intégrale $I(\alpha)$ est convergente.

2°) *Etude de l'absolue convergence de l'intégrale $J(\alpha)$*

a) Démontrer que l'intégrale $J(\alpha)$ est absolument convergente pour $\alpha > 1$.

b) Vérifier que la fonction $t \longrightarrow |\sin(t)|$ est π-périodique, et en déduire, pour tout entier k, la valeur de l'intégrale $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)|\, \mathrm{d}t$.

c) Démontrer l'encadrement suivant pour tout réel $\alpha \geq 0$ et tout entier $k \geq 1$:

$$\frac{2}{(k+1)^\alpha \pi^\alpha} \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t \leq \frac{2}{k^\alpha \pi^\alpha}.$$

En déduire pour tout réel $\alpha \geq 0$ et tout entier $n \geq 1$ que :

$$\frac{2}{\pi^\alpha} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{\pi}^{n\pi} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t \leq \frac{2}{\pi^\alpha} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha}.$$

d) Préciser pour quelles valeurs du réel α l'intégrale $J(\alpha)$ est absolument convergente.

3°) *Etude de la convergence de l'intégrale $J(\alpha)$*

a) Etudier la convergence de l'intégrale $J(0)$.

b) Démontrer la relation suivante pour tout réel $\alpha > 0$ et tout réel $x \geq \pi$:

$$\int_\pi^x \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t = -\frac{1}{\pi^\alpha} - \frac{\cos(x)}{x^\alpha} - \alpha \int_\pi^x \frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\, \mathrm{d}t.$$

c) Calculer (en justifiant son existence) l'intégrale $\int_\pi^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha+1}}$ pour $\alpha > 0$.

En déduire l'absolue convergence de l'intégrale $\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$ pour $\alpha > 0$.

d) En déduire la convergence de l'intégrale $J(\alpha)$ pour $\alpha > 0$.

4°) *Domaine de définition de la fonction f*

Préciser les domaines de convergence et d'absolue convergence de l'intégrale $f(\alpha)$.

En déduire le domaine de définition de la fonction f introduite dans le préambule.

Dans toute la suite, on suppose que le paramètre α appartient à ce domaine de définition.

■ PARTIE II : Etude de $f(\alpha)$ quand α tend vers 0

On se propose dans cette partie d'étudier $f(\alpha)$ lorsque α tend vers 0, et on écrit à cet effet :

$$f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t + \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

5°) *Limite de l'intégrale* $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$

a) Justifier l'inégalité $0 \leq \sin(t) \leq t$ pour $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

b) En déduire à l'aide du théorème de convergence dominée (dont on précisera l'énoncé et dont on vérifiera les hypothèses) la valeur de la limite suivante :

$$\lim_{\alpha \longrightarrow 0} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t\,.$$

6°) *Limite de l'intégrale* $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$

a) A l'aide d'une double intégration par parties, justifier l'égalité suivante :

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{\alpha}{(\pi/2)^{\alpha+1}} - \alpha(\alpha+1)\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{\alpha+2}}\,\mathrm{d}t.$$

b) Calculer l'expression $\alpha(\alpha+1)\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha+2}}$, puis déterminer sa limite quand α tend vers 0.

En déduire la limite de $\alpha(\alpha+1)\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{\alpha+2}}\,\mathrm{d}t$, puis de $\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$, quand α tend vers 0.

c) Déduire de cette question et de la précédente la limite de $f(\alpha)$ lorsque α tend vers 0.

Peut-on obtenir cette limite par application directe du théorème de convergence dominée à l'intégrale $f(\alpha)$?

■ Partie III : Etude de $f(\alpha)$ quand α tend vers 2

7°) *Une autre expression de la fonction f*

a) Démontrer la convergence de l'intégrale suivante pour $0 < \alpha < 2$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t.$$

b) A l'aide d'une intégration par parties justifiée, établir que :

$$f(\alpha) = \alpha \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t.$$

En déduire que la fonction f est à valeurs strictement positives sur $]0, 2[$.

8°) *Limite de $f(\alpha)$ quand α tend vers 2*

On considère la fonction auxiliaire φ définie pour $t \in \mathbb{R}^*$ par $\varphi(t) = \frac{1-\cos(t)}{t^2}$.

a) Quelle est la limite L de $\varphi(t)$ lorsque t tend vers 0?
On posera désormais $\varphi(0) = L$, de sorte que φ est ainsi définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que la fonction φ reste strictement positive sur $[0, \pi]$, et justifier qu'elle admet sur $[0, \pi]$ un minimum strictement positif noté μ (qu'on ne demande pas d'expliciter).

c) Etablir les inégalités suivantes :

$$f(\alpha) \geq \alpha \int_0^{\pi} \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\, \mathrm{d}t \ \geq \ \alpha\, \mu\, \frac{\pi^{2-\alpha}}{2-\alpha}.$$

d) En déduire la limite de $f(\alpha)$ quand α tend vers 2 par valeurs inférieures.

■ Partie IV : Calcul de l'intégrale $f(1)$

9°) *Calcul d'intégrales auxiliaires*

a) Justifier pour tout entier naturel n l'existence de l'intégrale suivante :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2\,n+1)\,t)}{\sin(t)}\, \mathrm{d}t.$$

b) Préciser la valeur de I_0, et prouver qu'on a $I_n - I_{n-1} = 0$ pour tout entier $n \geq 1$.
En déduire la valeur de l'intégrale I_n.

c) On considère la fonction auxiliaire ψ définie pour $0 < t \leq \frac{\pi}{2}$ par $\psi(t) = \frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t}$.
Quelle est la limite L de $\psi(t)$ lorsque t tend vers 0?
On posera désormais $\psi(0) = L$, de sorte que ψ est ainsi définie et continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

d) Démontrer l'égalité suivante pour tout entier naturel n :

$$\int_0^{\pi/2} \psi(t) \sin((2\,n+1)\,t)\, \mathrm{d}t \ = \ \frac{\pi}{2} - \int_0^{(2\,n+1)\,\pi/2} \frac{\sin(u)}{u}\, \mathrm{d}u.$$

10°) *Lemme de Riemann-Lebesgue pour les fonctions de classe C^1*

On considère une fonction g de classe C^1 du segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$.

A tout entier naturel n, on associe l'intégrale suivante :

$$u_n = \int_0^{\pi/2} g(t) \sin((2\,n+1)\,t)\, \mathrm{d}t.$$

a) Démontrer que :

$$u_n = \frac{g(0)}{2\,n+1} + \frac{1}{2\,n+1} \int_0^{\pi/2} g'(t) \cos((2\,n+1)\,t)\, \mathrm{d}t.$$

b) A l'aide d'une majoration convenable de cette dernière intégrale, en déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

c) En admettant, ce que l'on ne demande pas de vérifier ici, que la fonction continue ψ introduite à la question 9.c) est de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, en déduire la valeur de $f(1)$.