Ecole Pour l'Informatique et les Techniques Avancées.
Mathématiques.

Partie I. Absolue convergence et convergence de l'intégrale $f(\alpha)$

1) *Etude de la convergence de* $I(\alpha)$

a) Soit $\alpha \in [0, +\infty[$. $\dfrac{\sin(t)}{t^\alpha} \underset{t \to 0}{\sim} \dfrac{t}{t^\alpha} = \dfrac{1}{t^{\alpha-1}}$.

b) Soit $\alpha \in [0, +\infty[$. La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t^\alpha}$ est continue sur $]0\pi]$ et positive. Donc, l'intégrale $I(\alpha)$ est convergente si et seulement si la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0, \pi]$

Puisque $\dfrac{\sin(t)}{t^\alpha} \underset{t \to 0}{\sim} t^{1-\alpha}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0, \pi]$ si et seulement si $1 - \alpha > -1$ ou encore $\alpha < 2$.

2) *Etude de l'absolue convergence de* $J(\alpha)$

a) Soit $\alpha > 1$. La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t^\alpha}$ est continue sur $[\pi, +\infty[$ et pour tout $t \in [\pi, +\infty[$, $\left|\dfrac{\sin(t)}{t^\alpha}\right| = \dfrac{|\sin(t)|}{t^\alpha} \leqslant \dfrac{1}{t^\alpha}$. Puisque $\alpha > 1$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[\pi, +\infty[$ et il en est de même de la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t^\alpha}$. Mais alors, l'intégrale $J(\alpha)$ est absolument convergente.

b) Pour tout réel t, $|\sin(t + \pi)| = | - \sin(t)| = |\sin(t)|$ et donc la fonction $t \mapsto |\sin(t)|$ est π-périodique. Soit $k \in \mathbb{N}$. Par π-périodicité,

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)| \, dt = \int_0^\pi |\sin(t)| \, dt = \int_0^\pi \sin(t) \, dt = 2.$$

c) Soit $\alpha \in [0, +\infty[$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Par décroissance de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ sur $[k\pi, (k+1)\pi]$, pour tout t de $[k\pi, (k+1)\pi]$,

$$\frac{|\sin(t)|}{((k+1)\pi)^\alpha} \leqslant \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha} \leqslant \frac{|\sin(t)|}{(k\pi)^\alpha}.$$

Par croissance de l'intégration, on obtient

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha \pi^\alpha} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)| \, dt \leqslant \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha} \, dt \leqslant \frac{1}{k^\alpha \pi^\alpha} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)| \, dt$$

et donc, d'après la question précédente,

$$\frac{2}{(k+1)^\alpha \pi^\alpha} \leqslant \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha} \, dt \leqslant \frac{2}{k^\alpha \pi^\alpha}.$$

Soit alors $n \geqslant 2$. D'après la relation de Chasles, $\displaystyle\int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha} \, dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha} \, dt$. En additionnant membre à membre les inégalités ci-dessus, on obtient

$$\frac{2}{\pi^\alpha} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha} \, dt \leqslant \frac{2}{\pi^\alpha} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha},$$

ou encore

$$\frac{2}{\pi^\alpha} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha} \, dt \leqslant \frac{2}{\pi^\alpha} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha}.$$

d) Si $\alpha \in [0, 1]$, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{2}{\pi^\alpha} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = +\infty$ (série de Riemann d'exposant $\alpha \leqslant 1$) et donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha} \, dt = +\infty$.

Mais alors, si on pose pour $X \geqslant \pi$, $F(X) = \displaystyle\int_{\pi}^{X} \frac{|\sin(t)|}{t^{\alpha}}\,dt$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} F(n) = +\infty$. Puisque F est croissante sur $[\pi, +\infty[$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} F(X) = +\infty$ ou encore que $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t^{\alpha}}\,dt = +\infty$. L'intégrale $J(\alpha)$ n'est pas absolument convergente.

Si $\alpha > 1$, on a déjà dit que l'intégrale $J(\alpha)$ est absolument convergente et finalement,

$J(\alpha)$ est une intégrale absolument convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

3) *Etude de la convergence de* $J(\alpha)$

a) Pour $X \geqslant \pi$, $\displaystyle\int_{\pi}^{X} \sin(t)\,dt = [-\cos(t)]_{\pi}^{X} = -1 - \cos(X) = G(X)$. Montrons que la fonction G n'a pas de limite en $+\infty$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $G(2n\pi) = -2$ puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} G(2n\pi) = -2$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $G((2n+1)\pi) = 0$ puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} G((2n+1)\pi) = 0$. Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} G(2n\pi) \neq \lim_{n\to+\infty} G((2n+1)\pi)$, la fonction G n'a pas de limite en $+\infty$.

Il revient au même de dire que l'intégrale $J(0)$ est une intégrale divergente.

b) Soient $\alpha > 0$ et $x \in [\pi, +\infty[$. Les deux fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{t^{\alpha}}$ et $t \mapsto -\cos(t)$ sont de classe C^1 sur le segment $[x, \pi]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\begin{aligned}\int_{\pi}^{x} \frac{\sin(t)}{t^{\alpha}}\,dt &= \left[-\frac{\cos(t)}{t^{\alpha}}\right]_{\pi}^{x} - \int_{\pi}^{x} (-\cos(t))\frac{-\alpha}{t^{\alpha+1}}\,dt \\ &= -\frac{1}{x^{\alpha}} - \frac{\cos(x)}{x^{\alpha}} - \alpha\int_{\pi}^{x} \frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,dt.\end{aligned}$$

c) Puisque $\alpha + 1 > 1$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^{\alpha+1}}$ est intégrable sur $[\pi, +\infty[$ puis

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+1}} = \left[\frac{-1}{\alpha t^{\alpha}}\right]_{\pi}^{+\infty} = \frac{1}{\alpha\pi^{\alpha}} - \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha x^{\alpha}} = \frac{1}{\alpha\pi^{\alpha}}.$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}}$ est continue sur $[\pi, +\infty[$ et pour tout réel $t \in [\pi, +\infty[$, $\left|\dfrac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^{\alpha+1}}$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^{\alpha+1}}$ est intégrable sur $[\pi, +\infty[$ car $\alpha+1 > 1$ et donc la fonction $t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}}$ est intégrable sur $[\pi, +\infty[$. On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}}$ est absolument convergente.

d) En particulier, l'intégrale $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}}$ est convergente et donc la fonction $x \mapsto -\alpha\displaystyle\int_{\pi}^{x} \frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,dt$ a une limite réelle quand x tend vers $+\infty$. D'autre part, pour tout réel $x \geqslant \pi$, $\left|\dfrac{\cos(x)}{x^{\alpha}}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^{\alpha}}$. Puisque $\alpha > 0$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(x)}{x^{\alpha}} = 0$. Finalement, en tenant compte de l'égalité de la question 3)b), la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_{\pi}^{x} \frac{\sin(t)}{t^{\alpha}}\,dt$ a une limite réelle quand x tend vers $+\infty$ ou encore l'intégrale $J(\alpha)$ est une intégrale convergente.

4) *Domaine de définition de la fonction* f

Soit $\alpha \geqslant 0$. $f(\alpha)$ existe si et seulement si $I(\alpha)$ et $J(\alpha)$ existent. D'après les questions précédentes, ceci équivaut à $0 < \alpha < 2$.

Le domaine de définition de f est $]0, 2[$.

Soit $\alpha \in]0, 2[$. L'intégrale égale à $f(\alpha)$ est absolument convergente si et seulement si la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t^{\alpha}}$ est intégrable sur $]0, \pi]$ et sur $[\pi, +\infty[$. Ceci équivaut à $1 < \alpha < 2$.

Partie II. Etude de $f(\alpha)$ quand α tend vers 0

5) *Limite de l'intégrale* $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{t^{\alpha}}\,dt$

a) La fonction $t \mapsto \sin(t)$ est concave sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ car sa dérivée seconde, à savoir la fonction $t \mapsto -\sin(t)$ est négative sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Son graphe sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ est en-dessous de sa tangente en son point d'abscisse 0. Ceci fournit $\sin(t) \leqslant 1 \times (t - 0) + 0$ ou encore $\sin(t) \leqslant t$. Donc,

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

b) Soit $\begin{array}{cccc} \Phi\ : &]0,1] \times \left]0, \frac{\pi}{2}\right] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (\alpha, t) & \mapsto & \frac{\sin(t)}{t^\alpha} \end{array}$ de sorte que pour tout $\alpha \in]0,1]$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi(\alpha, t)\,dt$.

• Pour tout $\alpha \in]0,1]$, la fonction $t \mapsto \Phi(\alpha, t)$ est continue par morceaux sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

• Pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, la fonction $\alpha \mapsto \Phi(\alpha, t)$ admet une limite $\ell(t)$ quand α tend vers 0, à savoir $\ell(t) = \sin(t)$. De plus, la fonction $t \mapsto \ell(t)$ est continue par morceaux sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

• Pour tout $(\alpha, t) \in]0,1] \times \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $|\Phi(\alpha, t)| = \frac{\sin(t)}{t^\alpha} \leqslant \frac{t}{t^\alpha} = t^{1-\alpha} \leqslant 1 = \varphi(t)$ où de plus, la fonction φ est continue par morceaux, positive et intégrable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

D'après le théorème de convergence dominée pour les intégrales à paramètres,

• la fonction $\alpha \mapsto \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,dt$ a une limite quand α tend vers 0 par valeurs supérieures,

• la fonction $t \mapsto \ell(t)$ est intégrable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$,

• $\displaystyle\lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \alpha > 0}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ell(t)\,dt \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\,dt = 1.$

$$\lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \alpha > 0}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,dt = 1.$$

6) *Limite de l'intégrale* $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,dt$

a) Soit $\alpha \in]0,2[$. Soit $x \geqslant \frac{\pi}{2}$. Une double intégration par parties, licite, fournit

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,dt &= \left[\frac{(-\cos(t))}{t^\alpha}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{x} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{(-\cos(t))(-\alpha)}{t^\alpha}\,dt = -\frac{\cos(x)}{x^\alpha} - \alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,dt \\ &= -\frac{\cos(x)}{x^\alpha} - \alpha\left(\left[\frac{\sin(t)}{t^{\alpha+1}}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{x} + (\alpha+1)\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{\sin(t)}{t^{\alpha+2}}\,dt\right) \\ &= -\frac{\cos(x)}{x^\alpha} - \alpha\frac{\sin(x)}{x^{\alpha+1}} + \frac{\alpha}{(\pi/2)^{\alpha+1}} - \alpha(\alpha+1)\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{\sin(t)}{t^{\alpha+2}}\,dt. \end{aligned}$$

Maintenant, comme dans la partie I, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} -\frac{\cos(x)}{x^\alpha} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(x)}{x^{\alpha+1}} = 0$. D'autre part, : $\mathrm{alpha}+2 > 1$ et donc $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{\sin(t)}{t^{\alpha+2}}\,dt$ est une intégrale convergente. Quand x tend vers $+\infty$, on obtient

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,dt = \frac{\alpha}{(\pi/2)^{\alpha+1}} - \alpha(\alpha+1)\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{\sin(t)}{t^{\alpha+2}}\,dt.$$

b) $\displaystyle\alpha(\alpha+1)\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha+2}}\,dt = \alpha(\alpha+1)\left[-\frac{1}{(\alpha+1)t^{\alpha+1}}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} = \frac{\alpha}{(\pi/2)^{\alpha+1}}$ puis $\displaystyle\lim_{\alpha \to 0} \alpha(\alpha+1)\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha+2}}\,dt = 0.$

$$\left|\alpha(\alpha+1)\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{\alpha+2}}\,dt\right| \leqslant \alpha(\alpha+1)\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t^{\alpha+2}}\,dt \leqslant \alpha(\alpha+1)\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha+2}}\,dt \leqslant \frac{\alpha}{(\pi/2)^{\alpha+1}}.$$

Donc, $\displaystyle\lim_{\alpha \to 0} \alpha(\alpha+1)\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{\alpha+2}}\,dt = 0$. D'autre part, $\displaystyle\lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha}{(\pi/2)^{\alpha+1}} = 0$ et finalement, $\displaystyle\lim_{\alpha \to 0} \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,dt = 0.$

c) $\displaystyle\lim_{\alpha \to 0} f(\alpha) = \lim_{\alpha \to 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,dt + \lim_{\alpha \to 0} \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,dt = 1 + 0 = 1.$

Pour tout $t \in]0, +\infty[$, $\displaystyle\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} = \sin(t)$. Mais la fonction $t \mapsto \sin(t)$ n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$. On ne peut donc pas obtenir le résultat précédent par application directe du théorème de convergence dominée sur $]0, +\infty[$.

Partie III. Etude de $f(\alpha)$ quand α tend vers 2

7) *Une autre expression de la fonction* f

a) Soit $\alpha \in]0,2[$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$

En 0, $\dfrac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}} \sim \dfrac{t^{1-\alpha}}{2}$ avec $1-\alpha > 1-2 = -1$. Donc, la fonction $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}$ est intégrable sur un voisinage de 0 à droite.

En $+\infty$, $\dfrac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}} = \dfrac{O(1)}{t^{\alpha+1}} = O\left(\dfrac{1}{t^{\alpha+1}}\right)$ avec $\alpha+1 > 1$. Donc, la fonction $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$.

b) Soit $\alpha \in]0,2[$. Soient ε et A deux réels tels que $0 < \varepsilon < A$. Les deux fonctions $t \mapsto 1-\cos(t)$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ sont de classe C^1 sur le segment $[\varepsilon, A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^A \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,dt &= \left[\frac{1-\cos(t)}{t^\alpha}\right]_\varepsilon^A - \int_\varepsilon^A \frac{(1-\cos(t))(-\alpha)}{t^{\alpha+1}}\,dt \\ &= \frac{1-\cos(A)}{A^\alpha} - \frac{1-\cos(\varepsilon)}{\varepsilon^\alpha} + \alpha\int_\varepsilon^A \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,dt.\end{aligned}$$

Puisque $\left|\dfrac{1-\cos(A)}{A^\alpha}\right| \leqslant \dfrac{2}{A^\alpha}$ et que $\alpha > 0$, on a $\lim\limits_{A\to+\infty} \dfrac{1-\cos(A)}{A^\alpha} = 0$.

Ensuite, $\dfrac{1-\cos(\varepsilon)}{\varepsilon^\alpha} \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \dfrac{\varepsilon^{2-\alpha}}{2} \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0$ car $2-\alpha > 0$.

Quand ε tend vers 0 et A tend vers $+\infty$, on obtient

$$f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,dt = \alpha\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,dt.$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}$ est continue, positive et non nulle sur $]0,+\infty[$. On en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,dt > 0$. Ainsi, f est à valeurs strictement positives sur $]0,2[$.

8) *Limite de* $f(\alpha)$ *quand* α *tend vers* 2

a) Puisque $1-\cos(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^2}{2}$, $\lim\limits_{t\to 0} \varphi(t) = \dfrac{1}{2}$.

b) $\varphi(0) = \dfrac{1}{2} > 0$ et pour $t \in]0,\pi]$, $\varphi(t) = \dfrac{1-\cos(t)}{t^2} > 0$. Donc, φ est strictement positive sur $[0,\pi]$.

La fonction φ est continue sur $]0,\pi]$ en tant que quotient de fonctions continues sur $]0,\pi]$ dont le dénominateur ne s'annule pas et continue en 0 par définition de L. Donc, la fonction φ est continue sur le segment $[0,\pi]$ et en particulier, la fonction φ admet un minimum μ sur $[0,\pi]$. Puisque la fonction φ est strictement positive sur $[0,\pi]$, on a en particulier $\mu > 0$.

c) Soit $\alpha \in]0,2[$.

$$\begin{aligned}f(\alpha) &= \alpha\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,dt = \alpha\int_0^{\pi} \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,dt + \alpha\int_\pi^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,dt \\ &\geqslant \alpha\int_0^{\pi} \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,dt \text{ (car } \forall t \geqslant \pi,\ \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}} \geqslant 0) \\ &= \alpha\int_0^{\pi} \frac{t^2}{t^{\alpha+1}}\frac{1-\cos(t)}{t^2}\,dt = \alpha\int_0^\pi t^{1-\alpha}\varphi(t)\,dt \\ &\geqslant \alpha\mu\int_0^\pi t^{1-\alpha}\,dt = \alpha\mu\left[\frac{t^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right]_0^\pi = \alpha\mu\frac{\pi^{2-\alpha}}{2-\alpha}.\end{aligned}$$

d) Puisque $\mu > 0$, $\lim\limits_{\substack{\alpha\to 2\\ \alpha<2}} \alpha\mu\dfrac{\pi^{2-\alpha}}{2-\alpha} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{\substack{\alpha\to 2\\ \alpha<2}} f(\alpha) = +\infty$.

Partie IV. Calcul de l'intégrale $f(1)$

9) *Calcul d'intégrales auxiliaires*

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}$ est continue sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et est prolongeable par continuité en 0 (car $\dfrac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} \underset{t\to 0}{\sim} 2n+1$). Donc, la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}$ est intégrable sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. En particulier, I_n existe.

b) $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{\sin(t)}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$.

Soit $n \geqslant 1$.

$$\begin{aligned} I_n - I_{n-1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t) - \sin((2n-1)t)}{\sin(t)}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin(t)\cos(2nt)}{\sin(t)}\, dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2nt)\, dt \\ &= 2\left[\frac{\sin(2nt)}{2n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0. \end{aligned}$$

Donc, $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = I_{n-1}$. On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \frac{\pi}{2}.$$

c) $\psi(t) = \dfrac{t - \sin(t)}{t\sin(t)} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^3/6}{t^2} = \dfrac{t}{6}$ et en particulier, $\displaystyle\lim_{t\to 0} \psi(t) = 0$.

d) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(t)\sin((2n+1)t)\, dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} - \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\right) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}\, dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\, dt \text{ (les deux intégrales convergent)} \\ &= \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{(2n+1)\pi}{2}} \frac{\sin(u)}{\frac{u}{2n+1}}\, \frac{du}{2n+1} \text{ (en posant } u = (2n+1)t) \\ &= \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{(2n+1)\pi}{2}} \frac{\sin(u)}{u}\, du \end{aligned}$$

10) *Lemme de* RIEMANN-LEBESGUE *pour les fonctions de classe* C^1

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Les deux fonctions g et $t \mapsto -\dfrac{\cos((2n+1)t)}{2n+1}$ sont de classe C^1 sur le segment $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit :

$$\begin{aligned} u_n &= \left[g(t)\left(-\frac{\cos((2n+1)t)}{2n+1}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(t)\cos((2n+1)t)\, dt \\ &= -g\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) + \frac{g(0)}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(t)\cos((2n+1)t)\, dt \\ &= \frac{g(0)}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(t)\cos((2n+1)t)\, dt. \end{aligned}$$

b) On en déduit que pour $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n| \leqslant \frac{1}{2n+1}\left(|g(0)| + \int_0^{\frac{\pi}{2}} |g'(t)|\, dt\right)$$

et donc que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

c) En admettant que la fonction ψ est de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(t) \sin((2n+1)t)\ dt = 0$. D'après la question 9)d),

$$f(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\ du = \lim_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{(2n+1)\pi}{2}} \frac{\sin(u)}{u}\ du = \frac{\pi}{2}.$$

