Ecole Pour l'Informatique et les Techniques Avancées.
Mathématiques. Option

Partie I. Exemples de matrices nilpotentes

1) a) Si on note $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, on sait que $\forall (i,j,k,l) \in [\![1,n]\!]^4$, $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$.
Ici, $A = E_{1,n}$ puis $A^2 = E_{1,n} \times E_{1,n} = 0$ (car $n \geqslant 2$) pour $\forall k \geqslant 2$, $A^k = 0$. La matrice A est nilpotente d'indice 2.
Mais alors, $B = {}^tA$ est nilpotente d'indice 2.

b) $(A+B)^2 = (E_{1,n} + E_{n,1})^2 = E_{1,n}^2 + E_{1,n} \times E_{n,1} + E_{n,1} \times E_{1,n} + E_{n,1}^2 = E_{1,1} + E_{n,n} = \text{diag}(1, 0 \dots, 0, 1)$.
Mais alors, pour $q \in \mathbb{N}^*$, $(A+B)^{2q} = \text{diag}\left(1^q, 0^q, \dots, 0^q, 1^q\right) = \text{diag}(1, 0 \dots, 0, 1) = E_{1,1} + E_{n,n}$.
On en déduit encore que pour $q \in \mathbb{N}^*$, $(A+B)^{2q+1} = (A+B)^{2q}(A+B) = (E_{1,1} + E_{n,n})(E_{1,n} + E_{n,1}) = E_{1,n} + E_{n,1} = A+B$.

En résumé, $\forall q \in \mathbb{N}^*$, $(A+B)^{2q} = \text{diag}(1, 0 \dots, 0, 1)$ et $\forall q \in \mathbb{N}$, $(A+B)^{2q+1} = A+B$. En particulier, la matrice $A+B$ n'est pas nilpotente.

c) $AB = E_{1,n} \times E_{n,1} = E_{1,1}$ et $BA = E_{n,1} \times E_{1,n} = E_{n,n}$.
$\forall k \geqslant 1$, $(AB)^k = E_{1,1}^k = E_{1,1} = AB$ et de même, $(BA)^k = E_{n,n} = BA$. Les matrices AB et BA ne sont pas nilpotentes.

d) $\mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ n'est pas stable pour l'addition d'après les questions a) et b) et n'est pas stable pour le produit matriciel d'après les questions a) et c). Donc, $\mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et encore moins une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie II. Une forme réduite des matrices nilpotentes

2) *Une propriété de l'indice de nilpotence*

a) Supposons par l'absurde la famille $\left(f^{p-1}(e_1), \dots, f(e_1), e_1\right)$ liée. Il existe un n-uplet de nombres $(\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}) \neq (0, \dots, 0)$ etl que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k f^k(e_1) = 0$ (*). Soit $i \in [\![0, p-1]\!]$ le plus petit indice k tel que $\lambda_k \neq 0$.

Par définition de i, $\displaystyle\sum_{k=i}^{p-1} \lambda_k f^k(e_1) = 0$.En prenant les images des deux membres de cette égalité par f^{p-1-i}, on obtient $\displaystyle\sum_{k=i}^{p-1} \lambda_k f^{p-1+k-i}(e_1) = 0$. Dans cette somme, si $k \geqslant i+1$, alors $p-1+k-i \geqslant p-1+i+1-i = p$ et donc $f^{p-1+k-i}(e_1) = 0$.
Il reste $\lambda_i f^{p-1}(e_1) = 0$ ce qui est impossible car $\lambda_i \neq 0$ et $f^{p-1}(e_1) \neq 0$.

Donc, la famille $\left(f^{p-1}(e_1), \dots, f(e_1), e_1\right)$ est libre.

Le cardinal d'une famille libre est inférieur ou égal à la dimension de l'espace et donc $p \leqslant n$.

b) Si $g^n = 0$, g est nilpotent. Réciproquement, si g est nilpotent, notons p son indice de nilpotence. D'après a), $p \leqslant n$ puis $g^n = g^{n-p} \circ g^p = 0$. En résumé, g est nilpotent si et seulement si $g^n = 0$.

3) *Construction d'une base adaptée à un endomorphisme nilpotent : cas où* $n = 3$

a) D'après la question 2)a), la famille $\left(f^2(e_1), f(e_1), e_1\right)$ est libre. De plus, $\text{card}\left(f^2(e_1), f(e_1), e_1\right) = 3 = \dim\left(\mathbb{R}^3\right) < +\infty$ et donc la famille $\left(f^2(e_1), f(e_1), e_1\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

La matrice de f dans cette base est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $f^2 = 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^3,\ f(f(x)) = 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^3,\ f(x) \in \text{Ker}(f) \Rightarrow \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$. On en déduit que $\dim(\text{Im}(f)) \leqslant \dim(\text{Ker}(f))$.

D'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = 3$ et donc $(\dim(\text{Ker}(f)), \dim(\text{Im}(f))) \in \{(3,0), (2,1), (1,2), (0,3)\}$.
Puisque $\dim(\text{Im}(f)) \leqslant \dim(\text{Ker}(f))$, on a ou bien $\dim(\text{Ker}(f)) = 3$ et $\dim(\text{Im}(f)) = 0$, ou bien $\dim(\text{Ker}(f)) = 2$ et $\dim(\text{Im}(f)) = 1$. Enfin, $f \neq 0$ et donc $\dim(\text{Ker}(f)) = 2$ et $\dim(\text{Im}(f)) = 1$.

Ainsi, $\text{Ker}(f)$ est un plan vectoriel et $\text{Im}(f)$ est une droite vectorielle contenue dans $\text{Ker}(f)$. Puisque $f^2 = 0$, $f(f(e_1)) = 0$ et donc $f(e_1)$ est un vecteur non nul de $\text{Ker}(f)$. On peut alors compléter la famille libre $(f(e_1))$ de $\text{Ker}(f)$ en une base $(f(e_1), e_3)$ de $\text{Ker}(f)$.

Montrons que la famille $(f(e_1), e_1, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Puisque cette famille est de cardinal $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, il suffit de montrer que cette famille est libre. Soit $(a, bc,) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} af(e_1) + be_1 + ce_3 = 0 &\Rightarrow F(af(e_1) + be_1 + ce_3) = 0 \Rightarrow bf(e_1) = 0 \\ &\Rightarrow b = 0 \text{ (car } f(e_1) \neq 0). \end{aligned}$$

Il reste $af(e_1) + ce_3 = 0$ ce qui entraine $a = c = 0$ car la famille $(f(e_1), e_3)$ est libre. Finalement, la famille $(f(e_1), e_1, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

La matrice de f dans cette base est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4) *Construction d'une base adaptée à un endomorphisme nilpotent : cas général*

a) Soit $k \in [\![1, p]\!]$. Soit $x \in E$.

$$x \in \text{Ker}\left(f^{k-1}\right) \Rightarrow f^{k-1}(x) = 0 \Rightarrow f\left(f^{k-1}(x)\right) = 0 \Rightarrow f^k(x) = 0 \Rightarrow x \in \text{Ker}\left(f^k\right).$$

Ceci montre que $\text{Ker}\left(f^{k-1}\right) \subset \text{Ker}\left(f^k\right)$.

Soit $k \in [\![1, p]\!]$. Puisque $f^k\left(f^{p-k}(e_1)\right) = f^p(e_1) = 0$, le vecteur $f^{p-k}(e_1)$ est dans $\text{Ker}\left(f^k\right)$. Mais, $f^{k-1}\left(f^{p-k}(e_1)\right) = f^{p-1}(e_1) \neq 0$. Donc, le vecteur $f^{p-k}(e_1)$ n'est pas dans $\text{Ker}\left(f^{k-1}\right)$.

On a montré que $\text{Ker}\left(f^{k-1}\right) \underset{\neq}{\subset} \text{Ker}\left(f^k\right)$.

b) Soit $k \in [\![1, p]\!]$. Soit $x \in \text{Ker}\left(f^k\right)$. $f^{k-1}(f(x)) = f^k(x) = 0$ et donc $f(x) \in \text{Ker}\left(f^{k-1}\right)$.
On a montré que $f\left(\text{Ker}\left(f^k\right)\right) \subset \text{Ker}\left(f^{k-1}\right)$.

c) Si $p = 1$, il n'y a plus rien à faire. Si $p \geqslant 2$, $\text{Ker}(f)$ est strictement contenu dans $\text{Ker}\left(f^2\right)$ et donc $\mathscr{B}_1$ est une famille libre de $\text{Ker}\left(f^2\right)$ qui n'est pas une base de $\text{Ker}\left(f^2\right)$. On peut compléter $\mathscr{B}_1$ en $\mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$ base de $\ker\left(f^2\right)$.
Plus généralement, en supposant avoir construit si $k \leqslant p$ donné, une base $\mathscr{B}_1 \cup \ldots \cup \mathscr{B}_{k-1}$ base de $\text{Ker}\left(f^{k-1}\right)$ telle que pour tout $i \in [\![1, k-1]\!]$, $\mathscr{B}_1 \cup \ldots \mathscr{B}_i$ est une base de $\text{Ker}\left(f^i\right)$. Puisque $\text{Ker}\left(f^{k-1}\right)$ est strictement contenu dans $\text{Ker}\left(f^k\right)$, on peut compléter $\mathscr{B}_1 \cup \ldots \cup \mathscr{B}_{k-1}$ en une base $\mathscr{B}_1 \cup \ldots \cup \mathscr{B}_{k-1} \cup \mathscr{B}_k$ de $\text{Ker}\left(f^k\right)$.

d) La matrice de f dans cette base a la forme triangulaire par blocs suivante : $\begin{pmatrix} 0 & A_{1,2} & \ldots & \ldots & A_{1,p} \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & A_{p-1,p} \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (les zéros sur la diagonale sont des blocs).

En particulier, la matrice obtenue est triangulaire supérieure à éléments diagonaux tous nuls.

5) *Etude de la réciproque du résultat précédent*

a) Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux et donc

$$\chi_T = \prod_{i=1}^{n} (X - t_{i,i}) = X^n.$$

b) D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_T(T) = 0$ ou encore $T^n = 0$.

Partie III. Dimension maximale d'un sous-espace $\mathcal{N}$ de $\mathcal{N}_n(\mathbb{R})$

6) *Matrices symétriques réelles et matrices nilpotentes*

a) Soit $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, M est orthogonalement semblable à une matrice diagonale. En particulier, M est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Donc, il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R})$ telles que $P^{-1}MP = D$.

Supposons de plus M nilpotente d'indice $p \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\text{diag}\left(\lambda_i^p\right)_{1 \leqslant i \leqslant n} = D^p = \left(P^{-1}MP\right)^p = P^{-1}M^pP = 0.$$

Ceci entraine $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i = 0$ puis $D = 0$ puis $M = 0$.

b) D'après ce qui précède, $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{N} = \{0\}$ et donc la somme $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{N}$ est directe. Puisque $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{N} \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on en déduit

$$\begin{aligned} n^2 &= \dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) \geqslant \dim(\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{N}) \\ &= \dim(\mathscr{S}_n(\mathbb{R})) + \dim(\mathcal{N}) \text{ (car la somme est directe)} \end{aligned}$$

et donc

$$\dim(\mathcal{N}) \leqslant n^2 - \dim(\mathscr{S}_n(\mathbb{R})) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

c) L'ensemble $\mathcal{N}$ des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux tous nuls est un sous-espace de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$ et constitué de matrices nilpotentes d'après la question 5).

Partie IV. Caractérisation de $\mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ à l'aide de la trace

7) *Trace d'une matrice nilpotente*

a) Soient $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\text{Tr}(\lambda A + \mu B) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_{i,i} + \mu b_{i,i}) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \mu \sum_{i=1}^{n} b_{i,i} = \lambda \text{Tr}(A) + \mu \text{Tr}(B).$$

Ainsi, Tr est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, non nulle car $\text{Tr}(I_n) = n \neq 0$. Son noyau est un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et donc la dimension de Ker(Tr) est $n^2 - 1$.

b) Soit $N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$. D'après la question 4), N est semblable à une matrice triangulaire à coefficients diagonaux tous nuls. Puisque deux matrices semblables ont même trace, $\text{Tr}(N) = \text{Tr}(T) = 0$ et donc, $N \in \text{Ker(Tr)}$. On a montré que $\mathcal{N}_n(\mathbb{R}) \subset \text{Ker(Tr)}$. Puisque Ker(Tr) est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on en déduit encore que $\text{Vect}(\mathcal{N}_n(\mathbb{R})) \subset \text{Ker(Tr)}$.

8) *Etude de l'inclusion réciproque : cas où $n = 2$*

a) $E_{1,2}$ et $E_{2,1}$ sont nilpotentes d'indice 2. $N^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. N est également nilpotente.

b) $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + (c-a)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (b+a)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Ceci montre que $\text{Ker(Tr)} \subset \text{Vect}(E_{2,1}, E_{1,2}, N) \subset \text{Vect}(\mathcal{N}_2(\mathbb{R}))$ (puisque les trois matrices $E_{1,2}$, $E_{2,1}$ et N sont dans $\mathcal{N}_2(\mathbb{R})$). Finalement, $\text{Vect}(E_{2,1}, E_{1,2}, N) = \text{Ker(Tr)}$.

9) *Etude de l'inclusion réciproque : cas général*

a) Si $i \neq j$, $E_{i,j}^2 = 0$. $N_i^2 = (E_{1,1} - E_{1,i} + E_{i,1} - E_{i,i})(E_{1,1} - E_{1,i} + E_{i,1} - E_{i,i}) = (E_{1,1} - E_{1,i}) - (E_{1,1} - E_{1,i}) + (E_{i,1} - E_{i,i}) - (E_{i,1} - E_{i,i}) = 0$.

b) Soient $(\lambda_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant,\ i\neq j} \cup (\mu_i)_{2\leqslant i\leqslant n}$ une famille de $n^2 - 1$ réels tels que $\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n \\ i\neq j}} \lambda_{i,j} E_{i,j} + \sum_{i=2}^{n} \mu_i N_i = 0$.

Puisque la famille $(E_{k,l})$ est libre et que pour un couple (i,j) tel que $2 \leqslant i,j \leqslant$ et $i \neq j$, la matrice $E_{i,j}$ apparaît uniquement dans le terme $\lambda_{i,j} E_{i,j}$, on en déduit que tous les coefficients $\lambda_{i,j}$ tels que $2 \leqslant i,j \leqslant$ et $i \neq j$, sont nuls.

Il reste $\displaystyle\sum_{i=2}^{n} \lambda_{1,i} E_{1,i} + \sum_{i=2}^{n} \lambda_{i,1} E_{i,1} + \sum_{i=2}^{n} \mu_i (E_{1,1} - E_{1,i} + E_{i,1} - E_{i,i}) = 0$ ou encore

$$\left(\sum_{i=2}^{n} \mu_i\right) E_{1,1} + \sum_{i=2}^{n} \mu_i E_{i,i} + \sum_{i=2}^{n} (\lambda_{1,i} - \mu_i) E_{1,i} + \sum_{i=2}^{n} (\lambda_{i,1} + \mu_i) E_{i,1} = 0.$$

Mais alors, tous les μ_i, $2 \leqslant i \leqslant n$, sont nuls puis tous les $\lambda_{1,i} - \mu_i$, $2 \leqslant i \leqslant n$ et tous les $\lambda_{i,1} + \mu_i$, $2 \leqslant i \leqslant n$, sont nuls et finalement tous les $\lambda_{i,j}$ et tous les μ_i sont nuls. On a montré que la famille $\mathcal{F}_n$ est libre.

Puisque $\mathscr{F}_n$ est une famille libre de $\text{Vect}(\mathcal{N}_n(\mathbb{R}))$, on en déduit que

$$\dim(\text{Vect}(\mathcal{N}_n(\mathbb{R}))) \geqslant \dim(\text{Vect}(\mathcal{F}_n)) = \text{card}(\mathcal{F}_n) = n^2 - 1.$$

c) D'autre part, puisque $\text{Vect}(\mathcal{N}_n(\mathbb{R})) \subset \text{Ker(Tr)}$, on a $\dim(\text{Vect}(\mathcal{N}_n(\mathbb{R}))) \leqslant \dim(\text{Ker(Tr)}) = n^2 - 1$ et finalement, $\dim(\text{Vect}(\mathcal{N}_n(\mathbb{R}))) = n^2 - 1$.

Ainsi, $\text{Vect}(\mathcal{N}_n(\mathbb{R}))$ est un sous-espace vectoriel de Ker(Tr) de même dimension finie et on en déduit que $\text{Vect}(\mathcal{N}_n(\mathbb{R})) = \text{Ker(Tr)}$.

d) $\mathcal{F}_n$ est une famille libre de $\text{Vect}\left(\mathcal{N}_n(\mathbb{R})\right) = \text{Ker}(\text{Tr})$ et $\text{card}\left(\mathcal{F}_n\right) = n^2 - 1 = \dim(\text{Ker}(\text{Tr})) < +\infty$. Donc, $\mathcal{F}_n$ est une base de $\text{Vect}\left(\mathcal{N}_n(\mathbb{R})\right) = \text{Ker}(\text{Tr})$.

Soit $M = \left(m_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ un élément de Ker(Tr). En tenant compte de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_{i,i} = 0$ de sorte que $\displaystyle -\sum_{i=2}^{n} m_{i,i} = m_{1,1}$, on a

$$M = \sum_{i=2}^{n}\left(m_{1,i} - m_{i,i}\right)E_{1,i} + \sum_{i=2}^{n}\left(m_{i,1} + m_{i,i}\right)E_{i,1} - \sum_{i=2}^{n} m_{i,i}N_i + \sum_{\substack{2\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}} m_{i,j}E_{i,j}.$$

