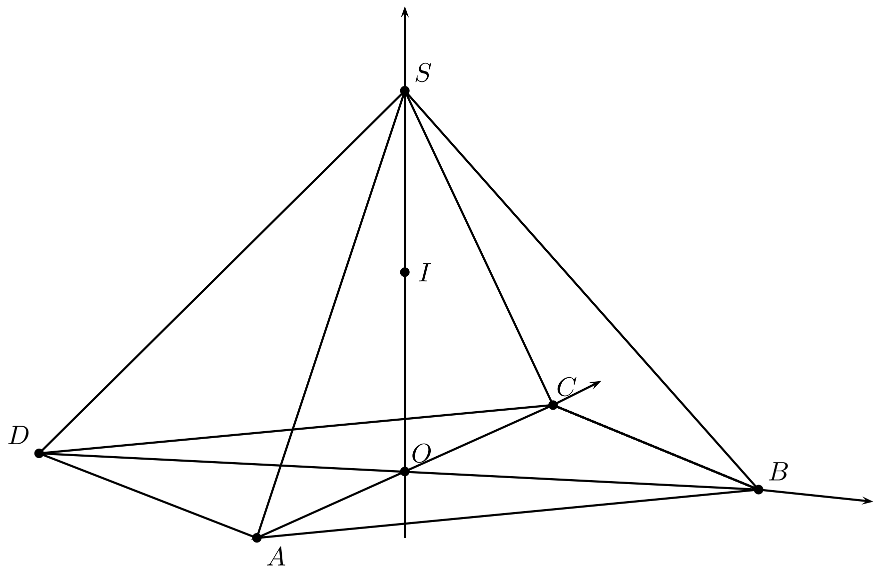
Rochambeau 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

On considère la pyramide régulière $SABCD$ de sommet S constituée de la base carrée $ABCD$ et de triangles équilatéraux représentée ci-dessous.



Le point O est le centre de la base $ABCD$ avec $OB = 1$.
On rappelle que le segment $[SO]$ est la hauteur de la pyramide et que toutes les arêtes ont la même longueur.

1) Justifier que le repère $\left(O\ ;\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OS}\right)$ est orthonormé.

Dans la suite de l'exercice, on se place dans le repère $\left(O\ ;\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OS}\right)$.

2) On définit le point K par la relation $\overrightarrow{SK} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{SD}$ et on note I le milieu du segment $[SO]$.

a) Déterminer les coordonnées du point K.

b) En déduire que les points B, I et K sont alignés.

c) On note L le point d'intersection de l'arête $[SA]$ avec le plan (BCI).
Justifier que les droites (AD) et (KL) sont parallèles.

d) Déterminer les coordonnées du point L.

3) On considère le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ dans le repère $\left(O\ ;\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OS}\right)$.

a) Montrer que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (BCI).

b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{AS}$ et $\overrightarrow{DS}$ sont coplanaires.

c) Quelle est la position relative des plans (BCI) et (SAD) ?

Rochambeau 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

1) On sait déjà que $\left\|\overrightarrow{OB}\right\| = \left\|\overrightarrow{OC}\right\| = 1$ et que $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = 0$ (les diagonales d'un carré sont perpendiculaires et de même longueur).

Ensuite, la droite (OS) est perpendiculaire au plan (ABC) et donc orthogonale à toute droite de ce plan. On en déduit que $\overrightarrow{OS}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OS}.\overrightarrow{OC} = 0$.

Ensuite, d'après le théorème de PYTHAGORE, $AB^2 = AO^2 + OB^2 = 2$ et donc $AB = \sqrt{2}$. Puisque le triangle (ABS) est équilatéral, on a aussi $BS = \sqrt{2}$. De nouveau, le théorème de PYTHAGORE fournit $BS^2 = BO^2 + OS^2$ et donc

$$OS^2 = BS^2 - OS^2 = 2 - 1 = 1,$$

puis $\left\|\overrightarrow{OS}\right\| = 1$. On a montré que le repère $\left(O, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS}\right)$ est orthonormé.

2) a) Le point D a pour coordonnées $(-1, 0, 0)$ et le point S a pour coordonnées $(0, 0, 1)$. Donc le vecteur $\overrightarrow{SD}$ a pour coordonnées $(-1, 0, -1)$. Par suite,

$$\overrightarrow{SK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SD} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_K - 0 = \dfrac{1}{3} \times (-1) \\ y_K - 0 = \dfrac{1}{3} \times 0 \\ z_K - 1 = \dfrac{1}{3} \times (-1) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_K = -\dfrac{1}{3} \\ y_K = \\ z_K = \dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$

Le point K a pour coordonnées $\left(-\dfrac{1}{3}, 0, \dfrac{2}{3}\right)$.

b) Le point B a pour coordonnées $(1, 0, 0)$ et le point I a pour coordonnées $\left(0, 0, \dfrac{1}{2}\right)$. Donc le vecteur $\overrightarrow{BI}$ a pour coordonnées $\left(-1, 0, \dfrac{1}{2}\right)$. D'autre part, le vecteur $\overrightarrow{BK}$ a pour coordonnées $\left(-\dfrac{4}{3}, 0, \dfrac{2}{3}\right)$. Par suite, $\dfrac{4}{3}\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BK}$. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BK}$ sont colinéaires ou encore les points B, I et K sont alignés.

c) Les plans (ADS) et (BCI) ne sont pas parallèles. Ces plans sont sécants en une droite (Δ). Les points K et L sont deux points distincts appartenant aux plans (ADS) et (BCI) et donc à (Δ). On en déduit que $(\Delta) = (KL)$.

Ainsi, les plans (ADS) et (BCI) sont sécants selon la droite (KL). De plus, (AD) est une droite du plan (ADS) et (BC) est une droite du plan (BCS) et les droites (AD) et (BC) sont parallèles. D'après le théorème du toit, la droite est parallèle aux droites (AD) et (BC) et en particulier, les droites (AD) et (KL) sont parallèles.

d) On a $\overrightarrow{SK} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{SD}$ et la droite (KL) est parallèle à la droite (AD). D'après le théorème de THALÈS dans le triangle (SAD), $\overrightarrow{KL} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{DA}$. Puisque le vecteur $\overrightarrow{DA}$ a pour coordonnées $(1, -1, 0)$, on a $\left\{\begin{array}{l} x_L + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3} \\ y_L - 0 = -\dfrac{1}{3} \\ z_K - \dfrac{2}{3} = 0 \end{array}\right.$ et donc le point L a pour coordonnées $\left(0, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$.

3) a) Le vecteur $\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées $(-1, 1, 0)$ et le vecteur $\overrightarrow{BI}$ a pour coordonnées $\left(-1, 0, \dfrac{1}{2}\right)$.

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{BC} = 1 \times (-1) + 1 \times 1 + 2 \times 0 = -1 + 1 = 0$$

et

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{BI} = 1 \times (-1) + 1 \times 0 + 2 \times \frac{1}{2} = -1 + 1 = 0.$$

Donc, le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BI}$ qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan (BCI). On en déduit que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (BCI).

b) Le vecteur $\overrightarrow{AS}$ a pour coordonnées $(0, 1, 1)$ et le vecteur $\overrightarrow{DS}$ a pour coordonées $(1, 0, 1)$. Donc, $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{DS} + \overrightarrow{AS}$. Ceci montre que les vecteurs $\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{AS}$ et $\overrightarrow{DS}$ sont coplanaires.

c) Soit $\overrightarrow{n'}$ un vecteur normal au plan (SAD). On sait que le vecteur $\overrightarrow{n'}$ est orthogonal à tout vecteur du plan (SAD). Donc,

$$\overrightarrow{n'}.\overrightarrow{n} = \overrightarrow{n'}.\left(\overrightarrow{DS} + \overrightarrow{AS}\right) = \overrightarrow{n'}.\overrightarrow{DS} + \overrightarrow{n}.\overrightarrow{AS} = 0 + 0 = 0.$$

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont orthogonaux et donc les plans (BCI) et (SAD) sont perpendiculaires.

