

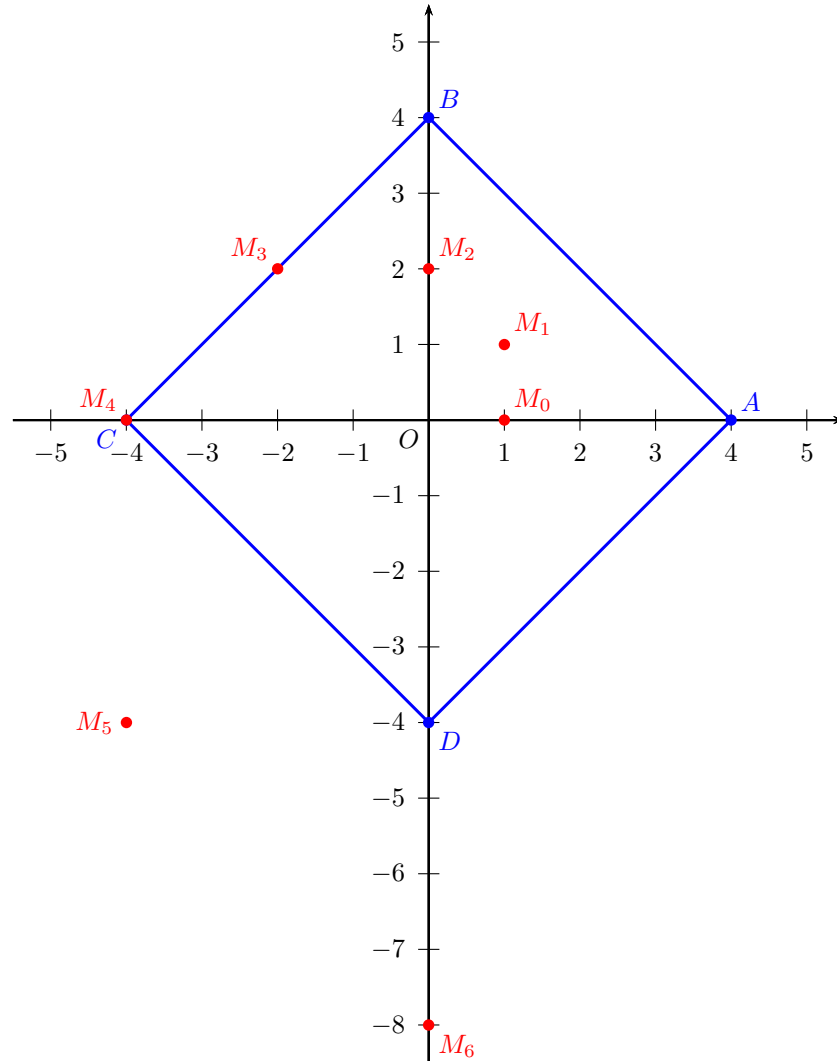
Rochambeau 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

1) $|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ puis

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

2) Graphique.



Soit n un entier naturel. La plus grande distance du point O à un point du carré $ABCD$ est $OA = 4$. Donc, on est sûr que le point M_n est à l'extérieur du carré si $OM_n > 4$.

$$\begin{aligned} OM_n > 4 &\Leftrightarrow |z_n| > 4 \Leftrightarrow |1 + i|^n > 4 \Leftrightarrow (\sqrt{2})^n > 4 \\ &\Leftrightarrow \ln\left((\sqrt{2})^n\right) > \ln(4) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0, +\infty[) \\ &\Leftrightarrow n \ln(\sqrt{2}) > 2 \ln(2) \Leftrightarrow \frac{n}{2} \ln(2) > 2 \ln(2) \Leftrightarrow \frac{n}{2} > 2 \Leftrightarrow n > 4 \\ &\Leftrightarrow n \geq 5. \end{aligned}$$

Donc, l'entier $n_0 = 5$ convient. On note que, puisque $M_4 = C$, 5 est la plus petite valeur possible de n_0 .