Rochambeau 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (3 points) (commun à tous les candidats)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
On considère le point A d'affixe 4, le point B d'affixe $4i$ et les points C et D tels que $ABCD$ est un carré de centre O.
Pour tout entier naturel non nul n, on appelle M_n le point d'affixe $z_n = (1+i)^n$.

1) Écrire le nombre $1+i$ sous forme exponentielle.

2) Montrer qu'il existe un entier naturel n_0, que l'on précisera, tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, le point M_n est à l'extérieur du carré $ABCD$.

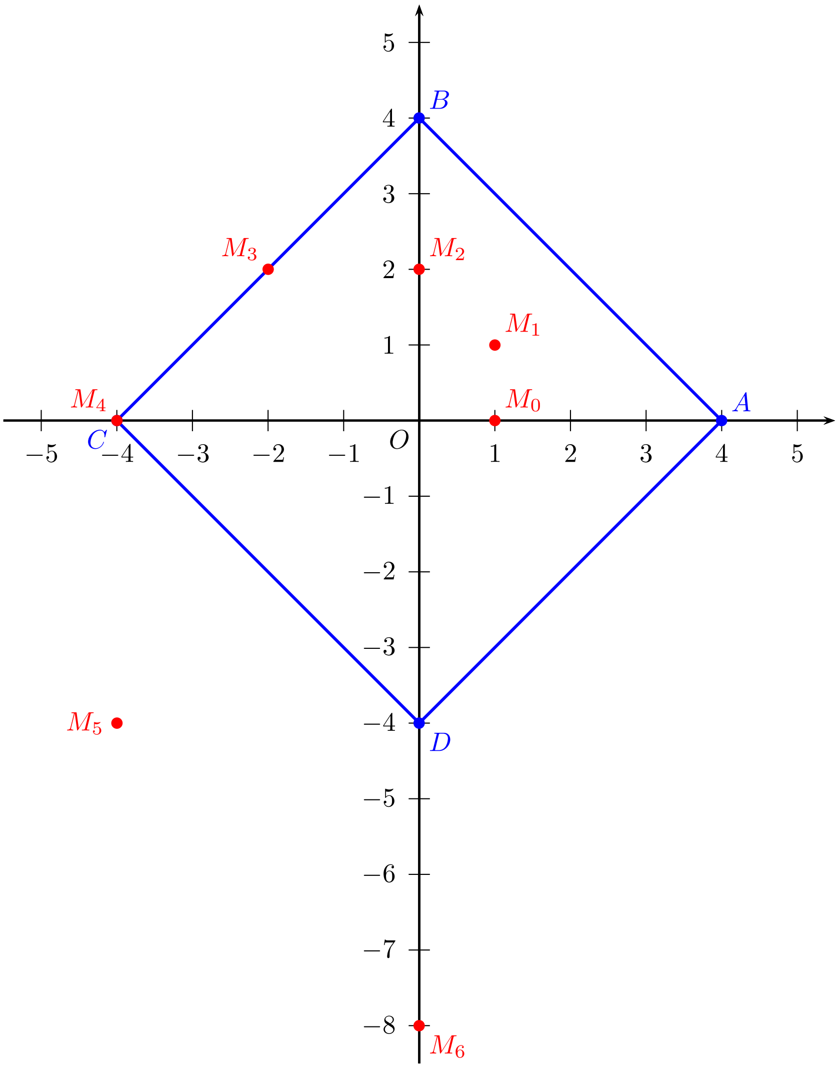
Rochambeau 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

1) $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ puis

$$1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

2) Graphique.



Soit n un entier naturel. La plus grande distance du point O à un point du carré $ABCD$ est $OA = 4$. Donc, on est sûr que le point M_n est à l'extérieur du carré si $OM_n > 4$.

$$\begin{aligned}
OM_n > 4 &\Leftrightarrow |z_n| > 4 \Leftrightarrow |1+i|^n > 4 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\right)^n > 4 \\
&\Leftrightarrow \ln\left(\left(\sqrt{2}\right)^n\right) > \ln(4) \text{ (par stricte croissance de la fonction } ln \text{ sur }]0,+\infty[) \\
&\Leftrightarrow n\ln\left(\sqrt{2}\right) > 2\ln(2) \Leftrightarrow \frac{n}{2}\ln(2) > 2\ln(2) \Leftrightarrow \frac{n}{2} > 2 \Leftrightarrow n > 4 \\
&\Leftrightarrow n \geqslant 5.
\end{aligned}$$

Donc, l'entier $n_0 = 5$ convient. On note que, puisque $M_4 = C$, 5 est la plus petite valeur possible de n_0.

