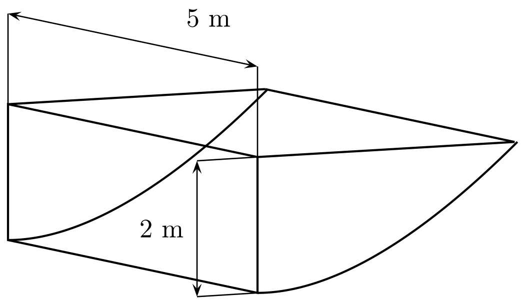
Rochambeau 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (6 points) (commun à tous les candidats)

Un particulier veut faire fabriquer un récupérateur d'eau. Ce récupérateur d'eau est une cuve qui doit respecter le cahier des charges suivant :

- elle doit être située à deux mètres de sa maison ;
- la profondeur maximale doit être de deux mètres ;
- elle doit mesurer cinq mètres de long ;
- elle doit épouser la pente naturelle du terrain.

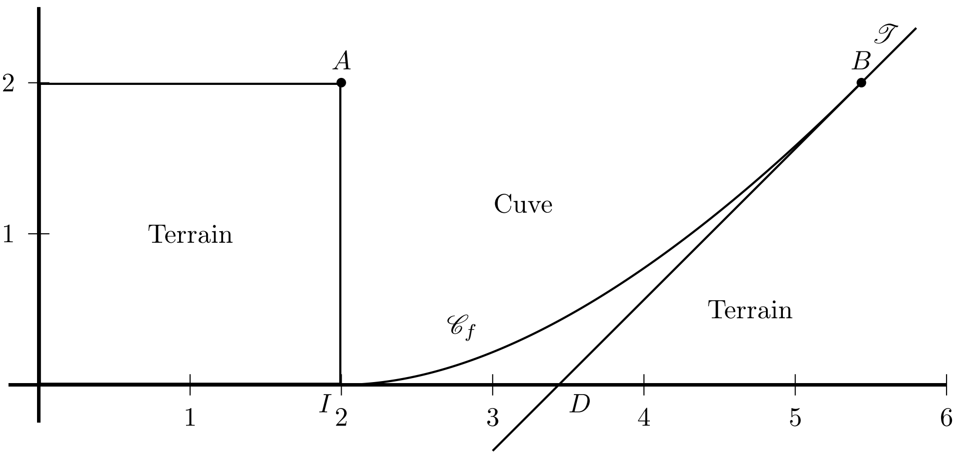
Cette cuve est schématisée ci-contre.



La partie incurvée est modélisée par la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f sur l'intervalle $[2\ ;\ 2e]$ définie par :

$$f(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right) - x + 2.$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ est représentée ci-dessous dans un repère orthonormé **d'unités 1 m** et constitue une vue de profil de la cuve.
On considère les points $A(2\ ;\ 2)$, $I(2\ ;\ 0)$ et $B(2e\ ;\ 2)$.



Partie A

L'objectif de cette partie est d'évaluer le volume de la cuve.

1) Justifier que les points B et I appartiennent à la courbe $\mathscr{C}_f$ et que l'axe des abscisses est tangent à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point I.

2) On note $\mathscr{T}$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B, et D le point d'intersection de la droite $\mathscr{T}$ avec l'axe des abscisses.

a) Déterminer une équation de la droite $\mathscr{T}$ et en déduire les coordonnées de D.

b) On appelle S l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, les droites d'équations $y = 2, x = 2$ et $x = 2e$.
S peut être encadrée par l'aire du triangle ABI et celle du trapèze $AIDB$.
Quel encadrement du volume de la cuve peut-on en déduire ?

3) a) Montrer que, sur l'intervalle $[2\ ;\ 2e]$, la fonction G définie par

$$G(x) = \frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4}$$

est une primitive de la fonction g définie par $g(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right)$.

b) En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[2\ ;\ 2e]$.

c) Déterminer la valeur exacte de l'aire S et en déduire une valeur approchée du volume V de la cuve au m^3 près.

Partie B

Pour tout réel x compris entre 2 et $2e$, on note $v(x)$ le volume d'eau, exprimé en m^3, se trouvant dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est égale à $f(x)$.
On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $[2\ ;\ 2e]$,

$$v(x) = 5\left[\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - 2x\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4} + 2x - 3\right].$$

1) Quel volume d'eau, au m^3 près, y a-t-il dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est de un mètre ?

2) On rappelle que V est le volume total de la cuve, f est la fonction définie en début d'exercice et v la fonction définie dans la partie B.

On considère l'algorithme ci-contre. Interpréter le résultat que cet algorithme permet d'afficher.

Variables :	a est un réel b est un réel

Traitement :	a prend la valeur 2
	b prend la valeur $2e$
	Tant que $v(b) - v(a) > 10^{-3}$ faire :
	    c prend la valeur $(a+b)/2$
	    Si $v(c) < V/2$, alors :
	        a prend la valeur c
	    Sinon
	        b prend la valeur c
	    Fin Si
	Fin Tant que

Sortie :	Afficher $f(c)$

Rochambeau 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

Partie A

1) $f(x_B) = f(2e) = 2e\ln\left(\dfrac{2e}{2}\right) - 2e + 2 = 2e - 2e + 2 = 2 = y_B$. Donc, le point B appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$.

$f(x_I) = f(2) = 2e\ln\left(\dfrac{2}{2}\right) - 2 + 2 = -2 + 2 = 0 = y_I$. Donc, le point I appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$.

La fonction f est dérivable sur $[2, 2e]$ et pour tout x de $[2, 2e]$,

$$f'(x) = 1 \times \ln\left(\frac{x}{2}\right) + x \times \frac{1/2}{x/2} - 1 = \ln\left(\frac{x}{2}\right) + 1 - 1 = \ln\left(\frac{x}{2}\right).$$

Par suite, $f'(x_I) = \ln\left(\dfrac{2}{2}\right) = \ln(1) = 0$. On en déduit que l'axe des abscisses est tangent à la courbe $\mathscr{C}_f$ en I.

2) a) On a déjà $x_B = 2e$ et $f(x_B) = 2$. Ensuite, $f'(x_B) = f'(2e) = \ln\left(\dfrac{2e}{2}\right) = \ln(e) = 1$. Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point B est $y = 2 + 1 \times (x - 2e)$ ou encore $y = x + 2 - 2e$.

Ensuite, $x + 2 - 2e = 0 \Leftrightarrow x = 2e - 2$. Le point D a donc pour coordonnées $(2e - 2, 0)$.

b) L'aire, exprimée en m^2, du triangle ABI vaut $\dfrac{AB \times AI}{2}$ ou encore $\dfrac{(2e-2) \times 2}{2}$ ou enfin $2e - 2$.

L'aire, exprimée en m^2, du trapèze $AIDB$ vaut $\dfrac{(AB + ID) \times AI}{2}$ ou encore $\dfrac{((2e-2) + (2e-4)) \times 2}{2}$ ou enfin $4e - 6$. On en déduit que

$$2e - 2 \leqslant S \leqslant 4e - 6.$$

Ceci fournit pour le volume V, exprimé en m^3, de la cuve :

$$10e - 10 \leqslant V \leqslant 20e - 30.$$

Ceci fournit encore $17,1 \leqslant V \leqslant 24,4$.

3) a) La fonction G est dérivable sur $[2, 2e]$ et pour tout x de $[2, 2e]$,

$$G'(x) = \frac{2x}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x^2}{2}\frac{1/2}{x/2} - \frac{2x}{4} = x\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2} - \frac{x}{2} = x\ln\left(\frac{x}{2}\right) = g(x).$$

Donc, la fonction G est une primitive de la fonction g sur $[2, 2e]$.

b) Une primitive de la fonction f sur $[2, 2e]$ est alors la fonction $F\ :\ x \mapsto \dfrac{x^2}{2}\ln\left(\dfrac{x}{2}\right) - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x^2}{2} + 2x$ ou encore $F\ :\ x \mapsto \dfrac{x^2}{2}\ln\left(\dfrac{x}{2}\right) - \dfrac{3x^2}{4} + 2x$

c)

$$\begin{aligned}
S &= \int_2^{2e} (2 - f(x))\,dx = \left[2x - \left(\frac{x^2}{2}\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{3x^2}{4} + 2x\right)\right]_2^{2e} \\
&= -\left(\frac{(2e)^2}{2}\ln\left(\frac{2e}{2}\right) - \frac{3(2e)^2}{4}\right) + \left(\frac{2^2}{2}\ln\left(\frac{2}{2}\right) - \frac{3 \times 2^2}{4}\right) \\
&= -2e^2 + 3e^2 - 3 = e^2 - 3,
\end{aligned}$$

puis

$$V = 5\left(e^2 - 3\right) = 22\ m^3 \text{ arrondi au mètre cube.}$$

Partie B

1) Notons V_0 le volume cherché.

La fonction f est continue sur $[2, 2e]$ et croît strictement de 0 à 2 sur cet intervalle. Donc, existe un réel x_0 et un seul dans l'intervalle $[2, 2e]$ tel que $f(x_0) = 1$.

La calculatrice fournit $f(4,3) = 0,99\ldots < 1$ et $f(4,4) = 1,06\ldots > 1$. Puisque la fonction f est croissante sur $[2, 2e]$, on en déduit que $4,3 \leqslant x_0 \leqslant 4,4$.

Quand x augmente, la hauteur d'eau dans la cuve augmente puis le volume d'eau dans la cuve augmente. Donc, la fonction v est croissante sur $[2, 2e]$. On en déduit que

$$v(4,3) \leqslant V_0 \leqslant v(4,4).$$

La calculatrice fournit $v(4,3) = 7,3\ldots$ et $v(4,4) = 8,2\ldots$ et on en déduit que $V_0 = 8$ m^3 au m^3 près.

2) L'algorithme affiche une valeur approchée de la hauteur d'eau dans la cuve pour laquelle le volume d'eau dans la cuve vaut la moitié du volume total à 10^{-3} près.

