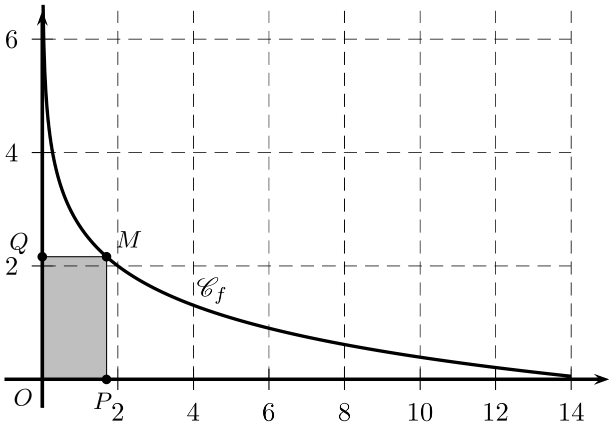
Pondichéry 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (3 points) (commun à tous les candidats)

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ 14]$ par

$$f(x) = 2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right).$$

La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f est donnée dans le repère orthogonal d'origine O ci-dessous :



À tout point M appartenant à $\mathscr{C}_f$, on associe le point P projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, et le point Q projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.

- L'aire du rectangle $OPMQ$ est-elle constante quelle que soit la position du point M sur $\mathscr{C}_f$?
- L'aire du rectangle OPMQ peut-elle être maximale ?
  Si oui, préciser les coordonnées du point M correspondant.

Justifier les réponses.

Pondichéry 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

Soit $x \in]0,14]$ l'abscisse du point M. L'aire, exprimée en unités d'aire, du rectangle $OPMQ$ est égale à

$$\mathscr{A}(x) = OP \times OQ = x_P y_Q = x_M y_M = 2x - x\ln\left(\frac{x}{2}\right).$$

• $\mathscr{A}(1) = 2 - \ln\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + \ln 2 = 2,693\ldots$ et $\mathscr{A}(2) = 4 - \ln(1) = 4$. Puisque $\mathscr{A}(1) \neq \mathscr{A}(2)$, la fonction $\mathscr{A}$ n'est pas constante sur $]0,14]$ ou encore l'aire du rectangle $OPMQ$ n'est pas constante quand le point M varie.

• La fonction $\mathscr{A}$ est dérivable sur $]0,14]$ et pour $x \in]0,14]$,

$$\mathscr{A}'(x) = 2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right) - x \times \frac{1/2}{x/2} = 2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = 1 - \ln\left(\frac{x}{2}\right).$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}\mathscr{A}'(x) \geqslant 0 &\Leftrightarrow 1 - \ln\left(\frac{x}{2}\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow -\ln\left(\frac{x}{2}\right) \geqslant -1 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{2}\right) \leqslant 1\\ &\Leftrightarrow \frac{x}{2} \leqslant e^1 \text{ (par stricte croissance de la fonction exponentielle sur } \mathbb{R})\\ &\Leftrightarrow x \leqslant 2e\end{aligned}$$

avec $2e = 5,4\ldots$ et donc $2e \in]0,14]$. Par suite, la fonction $\mathscr{A}$ est croissante sur $]0,2e]$ et décroissante sur $[2e,14]$. La fonction $\mathscr{A}$ admet un maximum en $2e$ et ce maximum est égal à

$$\mathscr{A}(2e) = 4e - 2e\ln\left(\frac{2e}{2}\right) = 4e - 2e \times 1 = 2e.$$

Dans ce cas, l'abscise de M est $2e$ et l'ordonnée de M est $f(2e) = 2 - \ln\left(\frac{2e}{2}\right) = 1$. Les coordonnées de M tel que l'aire du rectangle $OPMQ$ soit maximale, sont $(2e,1)$.

