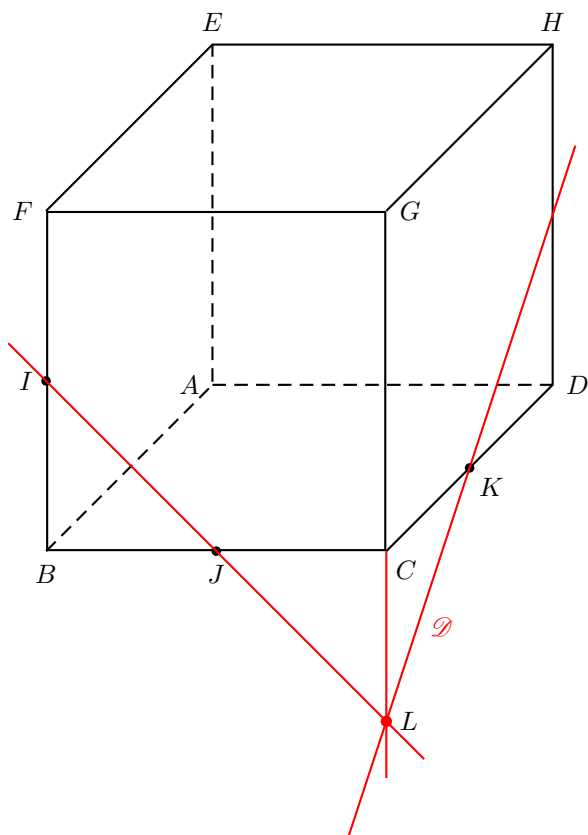


Pondichéry 2016. Enseignement spécifique

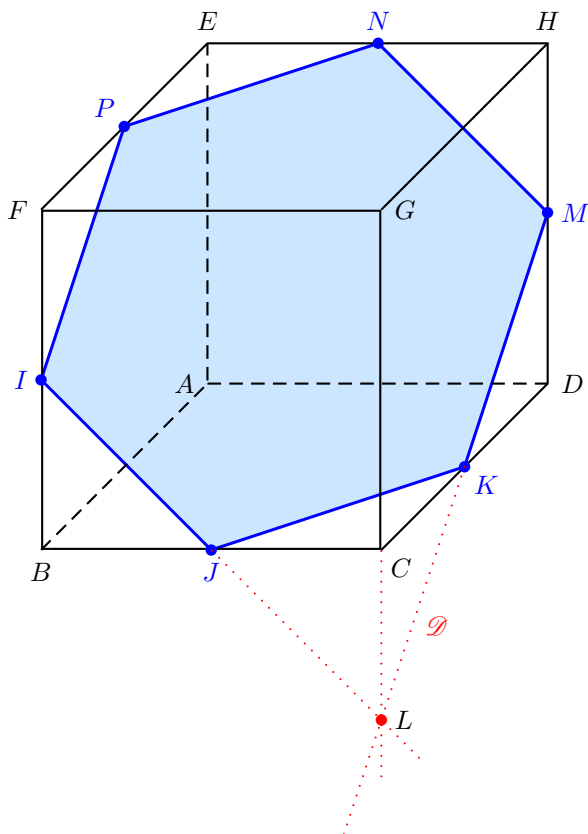
EXERCICE 3 : corrigé

Partie A

Les plans (IJK) et (CDH) sont sécants en une droite \mathcal{D} . K et L sont deux points distincts appartenant aux plans (IJK) et (CDH) . Donc, $\mathcal{D} = (KL)$.



La droite \mathcal{D} coupe la droite (HD) en un point M . Puisque les plans (BCG) et (ADE) sont parallèles, l'intersection des plans (IJK) et (ADE) est la parallèle à la droite (IJ) passant par M . Cette droite coupe la droite (EH) en un point N et l'intersection du plan (IJK) et du plan (ADE) est la droite (MN) . On trace enfin la parallèle à la droite (JK) passant par N . Cette droite coupe la droite (EF) en un point P et on peut achever le tracé de la section du cube par le plan (IJK) .



Partie B

1) Le point A a pour coordonnées $(0, 0, 0)$ et, puisque $\vec{OG} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE}$, le point G a pour coordonnées $(1, 1, 1)$. Les points B et F ont pour coordonnées respectives $(1, 0, 0)$ et $(1, 0, 1)$ et donc le point I a pour coordonnées $\left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$. Les points B et C ont pour coordonnées respectives $(1, 0, 0)$ et $(1, 1, 0)$ et donc le point J a pour coordonnées $\left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$. Les points C et D ont pour coordonnées respectives $(1, 1, 0)$ et $(0, 1, 0)$ et donc le point K a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$.

2) a) Les coordonnées respectives des vecteurs \vec{IJ} et \vec{IK} sont $\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ et $\left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$.

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (en analysant leur première coordonnée) et donc les points I , J et K définissent effectivement un plan de manière unique.

Les coordonnées du vecteur \vec{AG} sont $(1, 1, 1)$.

$$\vec{AG} \cdot \vec{IJ} = 1 \times 0 + 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

et

$$\vec{AG} \cdot \vec{IK} = 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \times 1 + 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} = 0.$$

Le vecteur \vec{AG} est orthogonal aux vecteurs \vec{IJ} et \vec{IK} qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK) . Donc, le vecteur \vec{AG} est un vecteur normal au plan (IJK) .

b) Le plan (IJK) est le plan passant par $I\left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$ et de vecteur normal $\vec{AG}(1, 1, 1)$. Une équation cartésienne de ce plan est

$$1 \times (x - 1) + 1 \times (y - 0) + 1 \times \left(z - \frac{1}{2}\right) = 0$$

ou encore

le plan (IJK) a pour équation $x + y + z = \frac{3}{2}$.

3) a) Soient $t \in [0, 1]$ puis M le point tel que $\vec{AM} = t\vec{AG}$. Le point M a pour coordonnées (t, t, t) puis

$$MI^2 = (1-t)^2 + (0-t)^2 + \left(\frac{1}{2}-t\right)^2 = t^2 - 2t + 1 + t^2 + t^2 - t + \frac{1}{4} = 3t^2 - 3t + \frac{5}{4}.$$

b) Pour $t \in [0, 1]$, posons $f(t) = IM^2 = 3t^2 - 3t + \frac{5}{4}$. Pour $t \in [0, 1]$, $f'(t) = 6t - 3$. Donc, f est décroissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Par suite, $f(t)$ est minimal pour $t = \frac{1}{2}$.

Quand $t = \frac{1}{2}$, le point M est le point N de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Puisque IM est minimale si et seulement si IM^2 est minimale, la distance IM est minimale pour le point $N\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

4) a) $x_N + y_N + z_N = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Donc le point N appartient au plan (IJK) .

b) Les coordonnées respectives de vecteurs \overrightarrow{AG} , \overrightarrow{IN} et \overrightarrow{BF} sont $(1, 1, 1)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ et $(0, 0, 1)$

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{IN} = 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times 0 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

et

$$\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{IN} = 0 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times 0 = 0.$$

Donc, la droite (IN) est orthogonale aux droites (AG) et (BF) . De plus, les droites (AG) et (IN) sont sécantes en N et les droites (BF) et (IN) sont sécantes en I . Donc, la droite (IN) est perpendiculaire aux droites (AG) et (BF) .