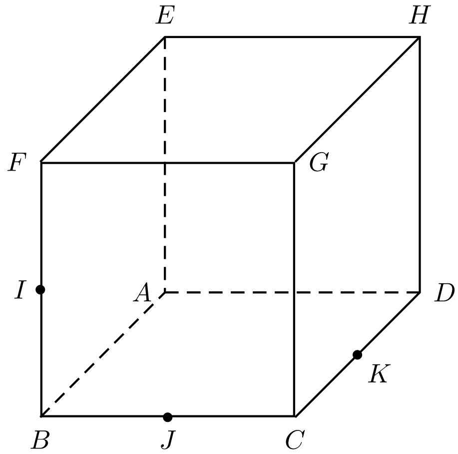
Pondichéry 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

$ABCDEFGH$ désigne un cube de côté 1.
Le point I est le milieu du segment $[BF]$.
Le point J est le milieu du segment $[BC]$.
Le point K est le milieu du segment $[CD]$.



Partie A

Dans cette partie, on ne demande aucune justification.

On admet que les droites (IJ) et (CG) sont sécantes en un point L.
Construire, sur la figure fournie en annexe et en laissant apparents les traits de construction :

- le point L ;
- l'intersection $\mathscr{D}$ des plans (IJK) et (CDH) ;
- la section du cube par le plan (IJK).

Partie B

L'espace est rapporté au repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.

1) Donner les coordonnées de A, G, I, J et K dans ce repère.

2) a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (IJK).

b) En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).

3) On désigne par M un point du segment $[AG]$ et t le réel de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AG}$.

a) Démontrer que $MI^2 = 3t^2 - 3t + \dfrac{5}{4}$.

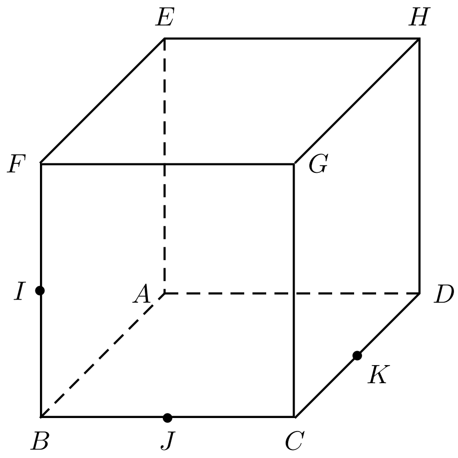
b) Démontrer que la distance MI est minimale pour le point $N\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$.

4) Démontrer que pour ce point $N\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$:

a) N appartient au plan (IJK).

b) La droite (IN) est perpendiculaire aux droites (AG) et (BF).

EXERCICE 3

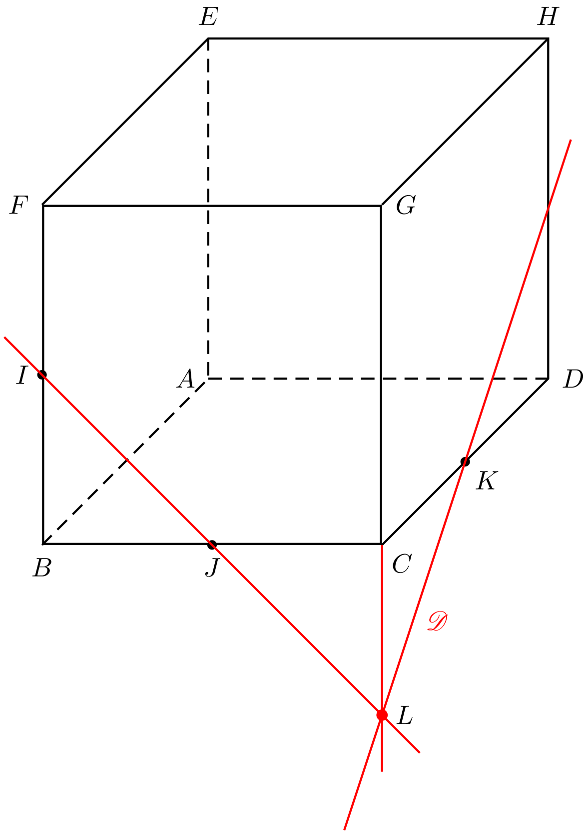


Pondichéry 2016. Enseignement spécifique

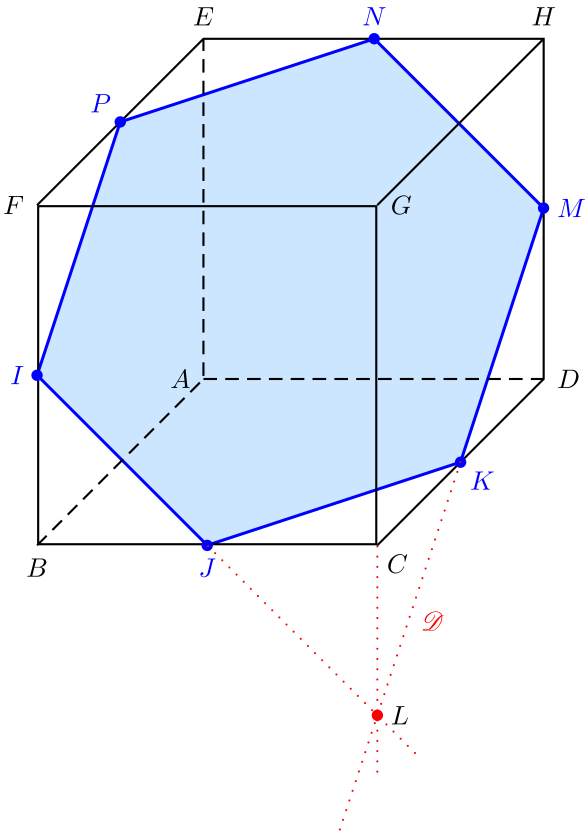
EXERCICE 3 : corrigé

Partie A

Les plans (IJK) et (CDH) sont sécants en une droite $\mathscr{D}$. K et L sont deux points distincts appartenant aux plans (IJK) et (CDH). Donc, $\mathscr{D} = (KL)$.



La droite $\mathscr{D}$ coupe la droite (HD) en un point M. Puisque les plans (BCG) et (ADE) sont parallèles, l'intersection des plans (IJK) et (ADE) est la parallèle à la droite (IJ) passant par M. Cette droite coupe la droite (EH) en un point N et l'intersection du plan (IJK) et du plan (ADE) est la droite (MN). On trace enfin la parallèle à la droite (JK) passant par N. Cette droite coupe la droite (EF) en un point P et on peut achever le tracé de la section du cube par le plan (IJK).



Partie B

1) Le point A a pour coordonnées $(0,0,0)$ et, puisque $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$, le point G a pour coordonnées $(1,1,1)$.
Les points B et F ont pour coordonnées respectives $(1,0,0)$ et $(1,0,1)$ et donc le point I a pour coordonnées $\left(1, 0, \dfrac{1}{2}\right)$.

Les points B et C ont pour coordonnées respectives $(1,0,0)$ et $(1,1,0)$ et donc le point J a pour coordonnées $\left(1, \dfrac{1}{2}, 0\right)$.

Les points C et D ont pour coordonnées respectives $(1,1,0)$ et $(0,1,0)$ et donc le point K a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}, 1, 0\right)$.

2) a) Les coordonnées respectives des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont $\left(0, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ et $\left(-\dfrac{1}{2}, 1, -\dfrac{1}{2}\right)$.
Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (en analysant leur première coordonnée) et donc les points I, J et K définissent effectivement un plan de manière unique.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AG}$ sont $(1,1,1)$.

$$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{IJ} = 1 \times 0 + 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

et

$$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{IK} = 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \times 1 + 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK). Donc, le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est un vecteur normal au plan (IJK).

b) Le plan (IJK) est le plan passant par $I\left(1, 0, \dfrac{1}{2}\right)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{AG}(1,1,1)$. Une équation cartésienne de ce plan est

$$1 \times (x-1) + 1 \times (y-0) + 1 \times \left(z - \frac{1}{2}\right) = 0$$

ou encore

$$\boxed{\text{le plan } (IJK) \text{ a pour équation } x + y + z = \frac{3}{2}.}$$

3) a) Soient $t \in [0,1]$ puis M le point tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AG}$. Le point M a pour coodonnées (t,t,t) puis

$$MI^2 = (1-t)^2 + (0-t)^2 + \left(\frac{1}{2} - t\right)^2 = t^2 - 2t + 1 + t^2 + t^2 - t + \frac{1}{4} = 3t^2 - 3t + \frac{5}{4}.$$

b) Pour $t \in [0,1]$, posons $f(t) = IM^2 = 3t^2 - 3t + \frac{5}{4}$. Pour $t \in [0,1]$, $f'(t) = 6t - 3$. Donc, f est décroissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Par suite, $f(t)$ est minimal pour $t = \frac{1}{2}$.

Quand $t = \frac{1}{2}$, le point M est le point N de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Puisque IM est minimale si et seulement si IM^2 est minimale, la distance IM est minimale pour le point $N\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

4) a) $x_N + y_N + z_N = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Donc le point N appartient au plan (IJK).

b) Les coordonnées respectives de vecteurs $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{IN}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont $(1,1,1)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ et $(0,0,1)$

$$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{IN} = 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times 0 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

et

$$\overrightarrow{BF}.\overrightarrow{IN} = 0 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times 0 = 0.$$

Donc, la droite (IN) est orthogonale aux droites (AG) et (BF). De plus, les droites (AG) et (IN) sont sécantes en N et les droites (BF) et (IN) sont sécantes en I. Donc, la droite (IN) est perpendiculaire aux droites (AG) et (BF).

