Pondichéry 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

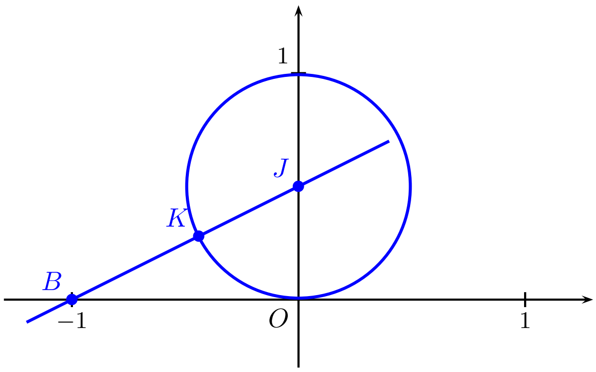
1) Le point J a pour coordonnées $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. D'après le théorème de PYTHAGORE,

$$BJ^2 = BO^2 + OJ^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

puis $BJ = \frac{\sqrt{5}}{2}$ et donc

$$BK = BJ - KJ = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

$$\boxed{BK = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.}$$



2) a) Puisque A_2 est sur le cercle trigonométrique, $|z_{A_2}| = OA_2 = 1$. D'autre part,

$$\arg(z_{A_2}) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OA_2}\right) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OA_1}\right) + \left(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}\right) = \frac{4\pi}{5}\ [2\pi].$$

Donc,

$$\boxed{z_{A_2} = e^{\frac{4i\pi}{5}}.}$$

b) Le point A_2 a pour coordonnées $\left(\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right), \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)$, le point B a pour coordonnées $(-1, 0)$. Donc,

$$\begin{aligned} BA_2^2 &= (x_{A_2} - x_B)^2 + (y_{A_2} - y_B)^2 = \left(\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 1\right)^2 + \left(\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)^2 \\ &= \cos^2\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 1 + \sin^2\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 2 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right). \end{aligned}$$

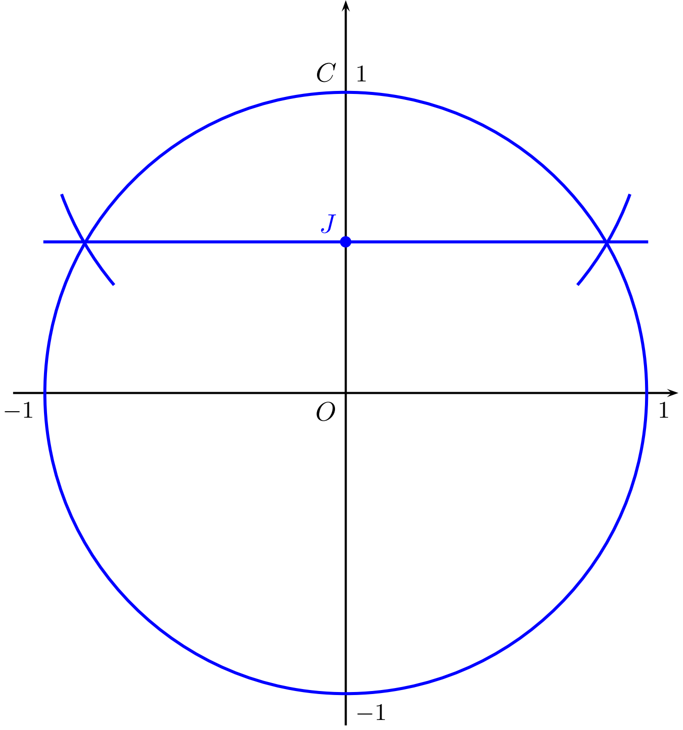
$$\boxed{BA_2^2 = 2 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right).}$$

c) Donc, $BA_2^2 = 2 + 2\frac{-\sqrt{5}-1}{4} = 2 + \frac{-\sqrt{5}-1}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ puis

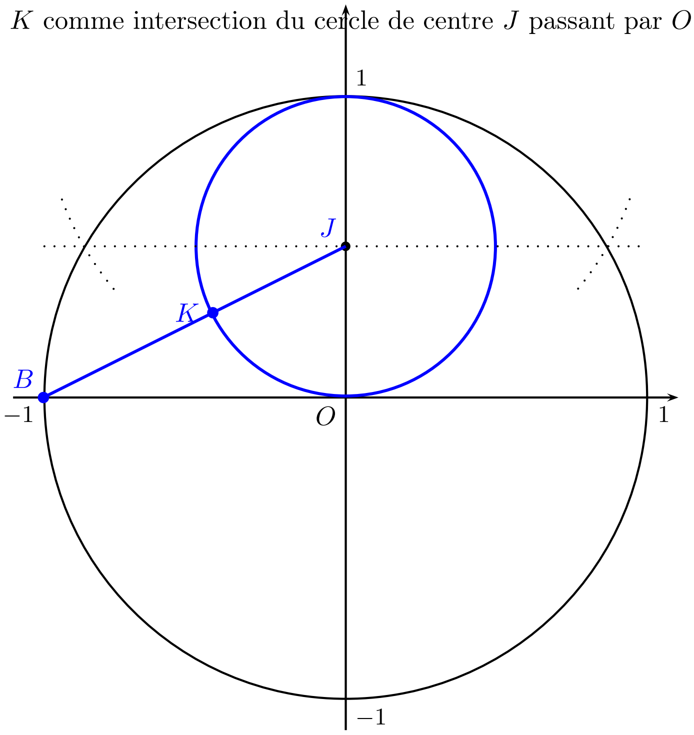
$$BA_2 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = BK.$$

$$\boxed{BA_2 = BK.}$$

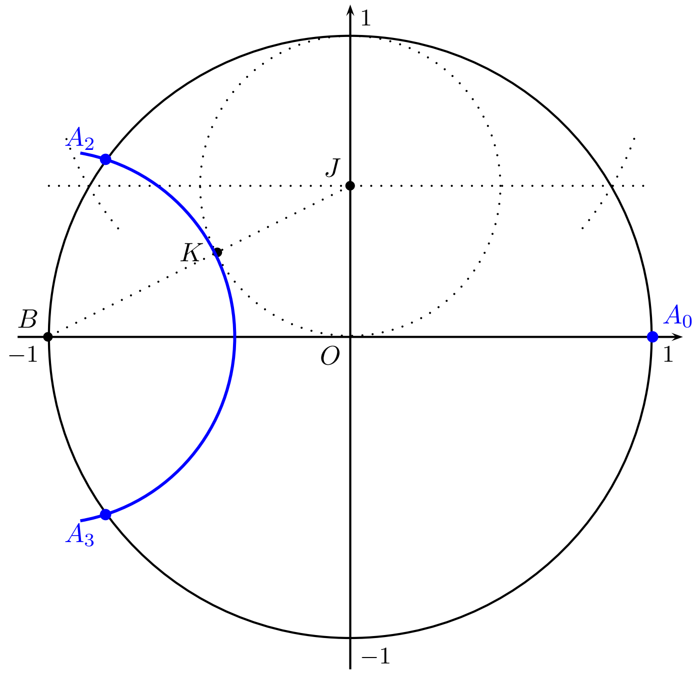
3) On commence par construire le cercle de centre O et de rayon 1 puis le point J milieu du segment $[OC]$ où C est le point de coordonnées $(0, 1)$ en construisant à la règle non graduée et au compas la médiatrice du segment $[OC]$.



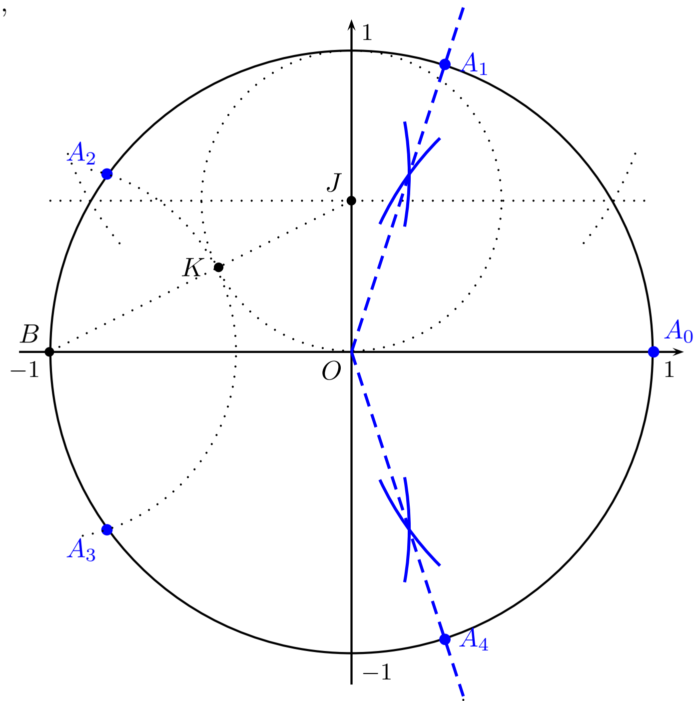
On construit ensuite le point K comme intersection du cercle de centre J passant par O et du segment $[BJ]$.



Les points A_2 et A_3 sont les points d'intersection du cercle trigonométrique et du cercle de centre B et de rayon BK.



Les points A_1 et A_4 sont les points d'intersection des bissectrices intérieures des angles $\widehat{A_0OA_2}$ et $\widehat{A_0OA_3}$ respectivement et du cercle trigonométrique,



et on obtient