

Pondichéry 2016. Enseignement spécifique

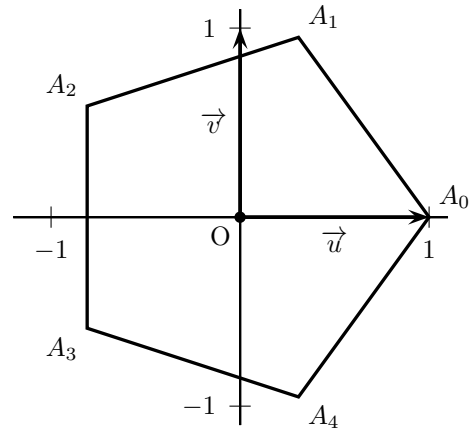
EXERCICE 2 (3 points) (commun à tous les candidats)

L'objectif de cet exercice est de trouver une méthode pour construire à la règle et au compas un pentagone régulier.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère le pentagone régulier $A_0A_1A_2A_3A_4$, de centre O tel que $\overrightarrow{OA_0} = \vec{u}$.

On rappelle que dans le pentagone régulier $A_0A_1A_2A_3A_4$, ci-contre :

- les cinq côtés sont de même longueur ;
- les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 appartiennent au cercle trigonométrique ;
- pour tout entier k appartenant à $\{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$ on a $(\overrightarrow{OA_k} ; \overrightarrow{OA_{k+1}}) = \frac{2\pi}{5}$.



1) On considère les points B d'affixe -1 et J d'affixe $\frac{i}{2}$.

Le cercle (\mathcal{C}) de centre J et de rayon $\frac{1}{2}$ coupe le segment $[BJ]$ en un point K .
Calculer BK , puis en déduire BK .

2) a) Donner sous forme exponentielle l'affixe du point A_2 . Justifier brièvement.

b) Démontrer que $BA_2^2 = 2 + 2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

c) Un logiciel de calcul formel affiche les résultats ci-dessous, que l'on pourra utiliser sans justification :

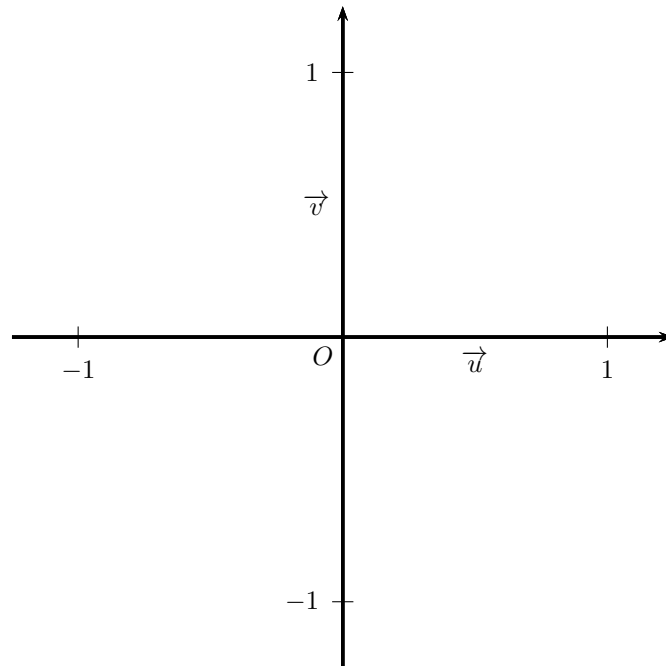
► Calcul formel	
1	$\cos(4 \cdot \pi / 5)$ $\rightarrow \frac{1}{4}(-\sqrt{5} - 1)$
2	$\text{sqrt}((3 - \text{sqrt}(5))/2)$ $\rightarrow \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$

« sqrt » signifie « racine carrée »

En déduire, grâce à ces résultats, que $BA_2 = BK$.

3) Dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) donné en annexe, construire à la règle et au compas un pentagone régulier. N'utiliser ni le rapporteur ni les graduations de la règle et laisser apparents les traits de construction.

EXERCICE 2



Pondichéry 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

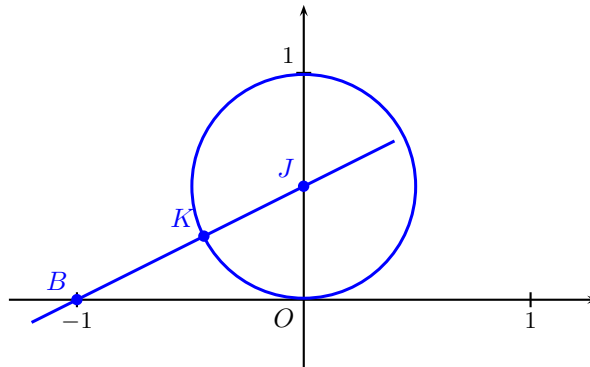
1) Le point J a pour coordonnées $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. D'après le théorème de PYTHAGORE,

$$BJ^2 = BO^2 + OJ^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

puis $BJ = \frac{\sqrt{5}}{2}$ et donc

$$BK = BJ - KJ = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

$$BK = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$



2) a) Puisque A_2 est sur le cercle trigonométrique, $|z_{A_2}| = OA_2 = 1$. D'autre part,

$$\arg(z_{A_2}) = (\vec{u}, \vec{OA_2}) = (\vec{u}, \vec{OA_1}) + (\vec{OA_1}, \vec{OA_2}) = \frac{4\pi}{5} [2\pi].$$

Donc,

$$z_{A_2} = e^{\frac{4i\pi}{5}}.$$

b) Le point A_2 a pour coordonnées $\left(\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right), \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)$, le point B a pour coordonnées $(-1, 0)$. Donc,

$$\begin{aligned} BA_2^2 &= (x_{A_2} - x_B)^2 + (y_{A_2} - y_B)^2 = \left(\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 1\right)^2 + \left(\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)^2 \\ &= \cos^2\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 1 + \sin^2\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 2 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right). \end{aligned}$$

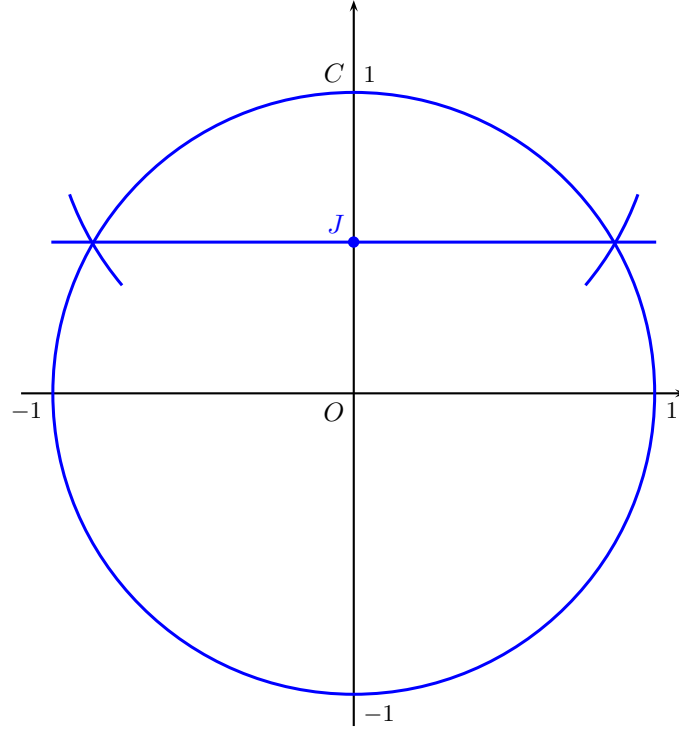
$$BA_2^2 = 2 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right).$$

c) Donc, $BA_2^2 = 2 + 2\frac{-\sqrt{5}-1}{4} = 2 + \frac{-\sqrt{5}-1}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ puis

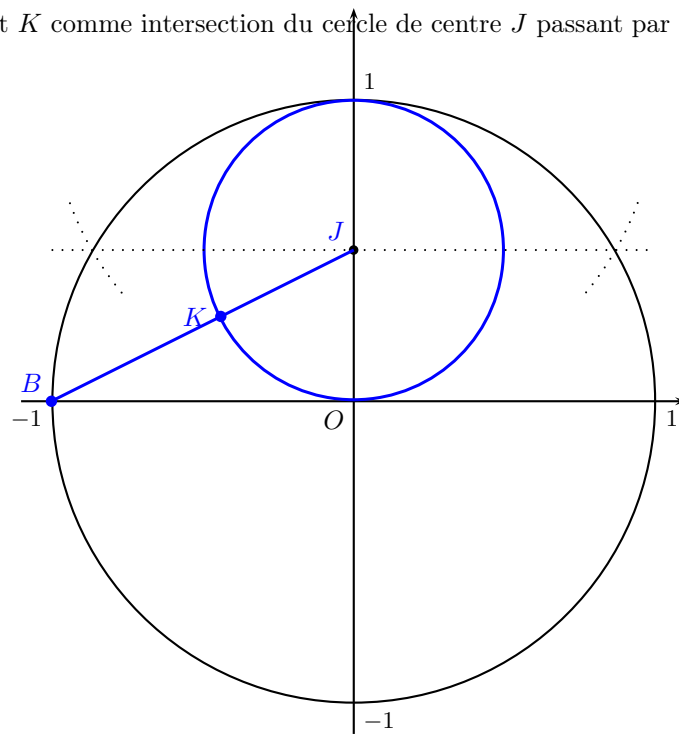
$$BA_2 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = BK.$$

$$BA_2 = BK.$$

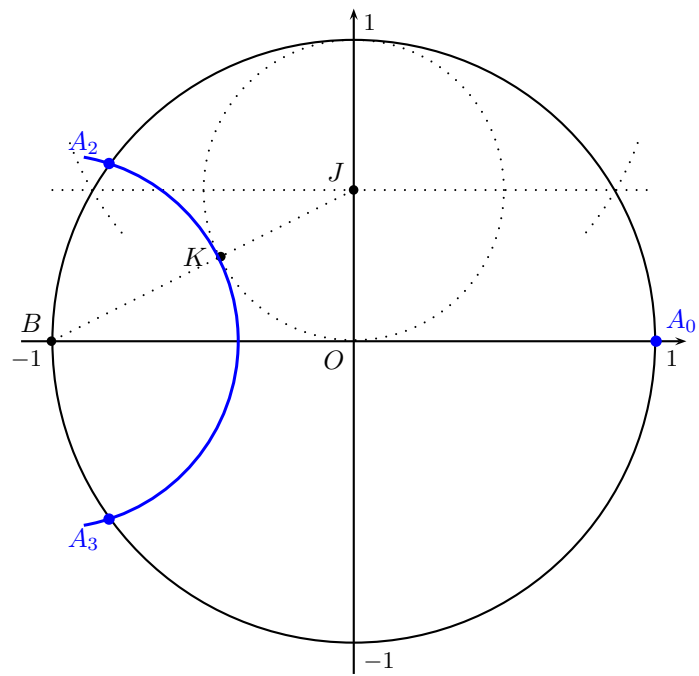
3) On commence par construire le cercle de centre O et de rayon 1 puis le point J milieu du segment $[OC]$ où C est le point de coordonnées $(0, 1)$ en construisant à la règle non graduée et au compas la médiatrice du segment $[OC]$.



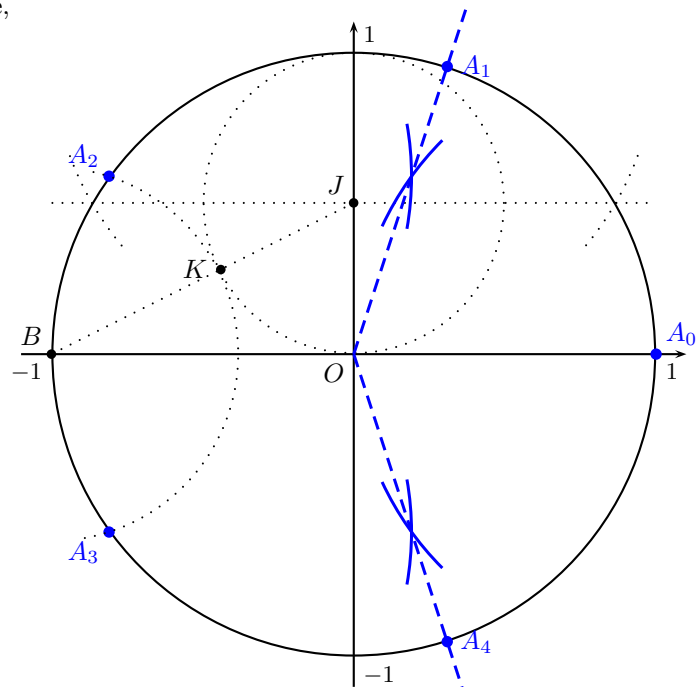
On construit ensuite le point K comme intersection du cercle de centre J passant par O et du segment $[BJ]$.



Les points A_2 et A_3 sont les points d'intersection du cercle trigonométrique et du cercle de centre B et de rayon BK .



Les points A_1 et A_4 sont les points d'intersection des bissectrices intérieures des angles $\widehat{A_0OA_2}$ et $\widehat{A_0OA_3}$ respectivement et du cercle trigonométrique,



et on obtient

