Pondichéry 2016. Enseignement spécifique

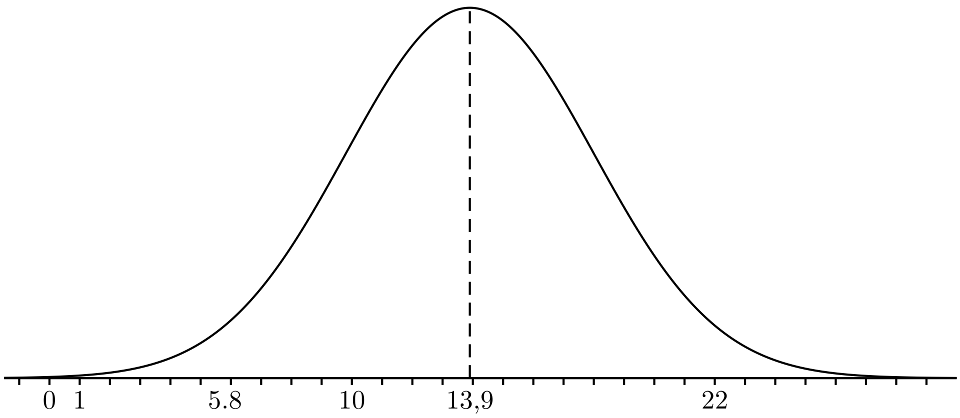
EXERCICE 1 (4 points) (commun à tous les candidats)

Les deux parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Des études statistiques ont permis de modéliser le temps hebdomadaire, en heures, de connexion à internet des jeunes en France âgés de 16 à 24 ans par une variable aléatoire T suivant une loi normale de moyenne $\mu = 13,9$ et d'écart type σ.

La fonction densité de probabilité de T est représentée ci-dessous :



1) On sait que $p(T \geqslant 22) = 0,023$.
En exploitant cette information :

a) hachurer sur le graphique donné un annexe, deux domaines distincts dont l'aire est égale à $0,023$;

b) déterminer $P(5,8 \leqslant T \leqslant 22)$. Justifier le résultat. Montrer qu'une valeur approchée de σ au dixième est $4,1$.

2) On choisit un jeune en France au hasard.
Déterminer la probabilité qu'il soit connecté à internet plus de 18 heures par semaine.
Arrondir au centième.

Partie B

Dans cette partie, les valeurs seront arrondies au millième.

La Hadopi (Haute Autorité pour la diffusion des œuvres et la protection des droits sur internet) souhaite connaître la proportion en France de jeunes âgés de 16 à 24 ans pratiquant au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet. Pour cela, elle envisage de réaliser un sondage.

Mais la Hadopi craint que les jeunes interrogés ne répondent pas tous de façon sincère. Aussi, elle propose le protocole $(\mathscr{P})$ suivant :

> On choisit aléatoirement un échantillon de jeunes âgés de 16 à 24 ans.
> Pour chaque jeune de cet échantillon :
> - le jeune lance un dé équilibré à 6 faces ; l'enquêteur ne connaît pas le résultat du lancer ;
> - l'enquêteur pose la question : « Effectuez-vous un téléchargement illégal au moins une fois par semaine ? » ;
>
> ■ si le résultat du lancer est pair alors le jeune doit répondre à la question par « Oui » ou « Non » de façon sincère ;
> ■ si le résultat du lancer est « 1 » alors le jeune doit répondre « Oui » ;
> ■ si le résultat du lancer est « 3 ou 5 » alors le jeune doit répondre « Non ».

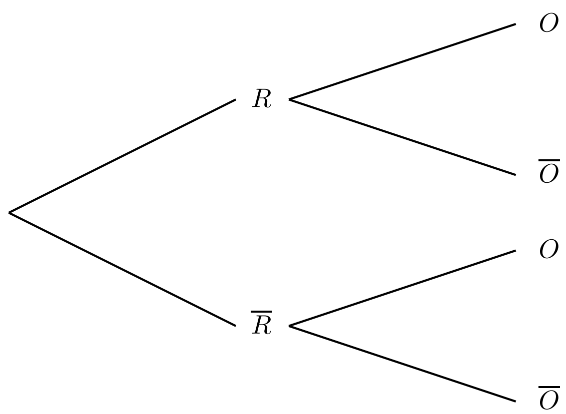
Grâce à ce protocole, l'enquêteur ne sait jamais si la réponse donnée porte sur la question posée ou résulte du lancer de dé, ce qui encourage les réponses sincères.

On note p la proportion inconnue de jeunes âgés de 16 à 24 ans qui pratiquent au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet.

1) *Calculs de probabilités*
On choisit aléatoirement un jeune faisant parti du protocole $(\mathscr{P})$.

On note : R l'évènement « le résultat du lancer est pair »,
O l'évènement « le jeune a répondu Oui ».

Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



En déduire que la probabilité q de l'évènement « le jeune a répondu Oui » est :

$$q = \frac{1}{2}p + \frac{1}{6}.$$

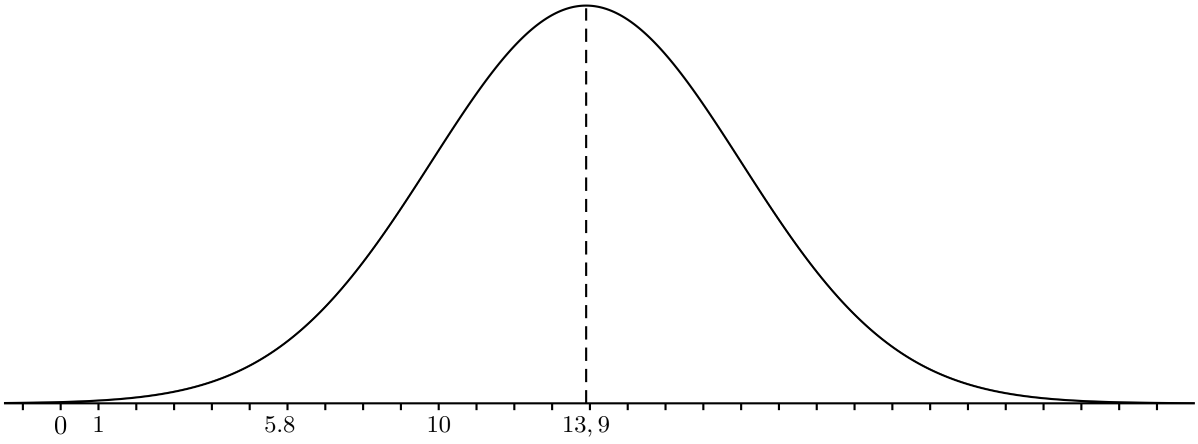
2) *Intervalle de confiance*

a) À la demande de l'Hadopi, un institut de sondage réalise une enquête selon le protocole ($\mathscr{P}$).
Sur un échantillon de taille 1 500, il dénombre 625 réponses « Oui ».
Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la proportion q qui répondent « Oui » à un tel sondage, parmi la population des jeunes français âgés de 16 à 24 ans.

b) Que peut-on en conclure sur la proportion p de jeunes qui pratiquent au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet ?

ANNEXE 1 à compléter et à remettre avec la copie

EXERCICE 1



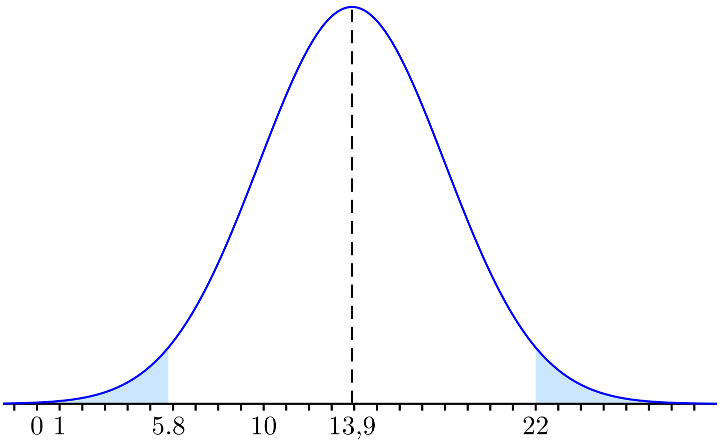
Pondichéry 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

Partie A

1) a) Le symétrique x du réel 22 par rapport au réel $13,9$ vérifie $\dfrac{x+22}{2} = 13,9$ et donc $x = 2\times 13,9 - 22 = 5,8$.

Graphique.



b) $P(5,8 \leqslant T \leqslant 22) = 1 - P(T \leqslant 5,8) - P(T \geqslant 22) = 1 - 2\times 0,023 = 0,954$.

Soit $Z = \dfrac{T-13,9}{\sigma}$. Z suit la loi normale centré réduite.

$P(T \leqslant 5,8) = 0,023$. De plus, $T \leqslant 5,8 \Leftrightarrow T - 13,9 \leqslant -8,1 \Leftrightarrow \dfrac{T-13,9}{\sigma} \leqslant -\dfrac{8,1}{\sigma}$ et donc

$$P\left(Z \leqslant -\frac{8,1}{\sigma}\right) = 0,023.$$

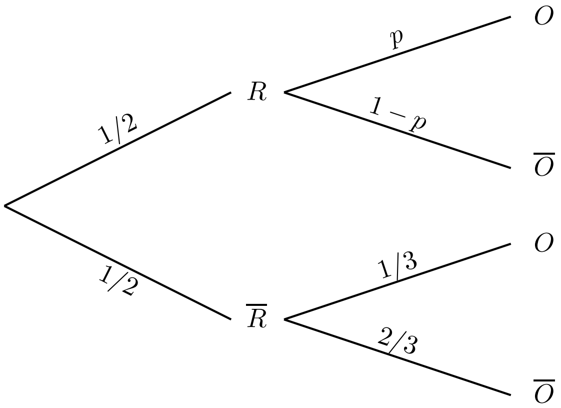
La calculatrice fournit $-\dfrac{8,1}{\sigma} = -1,995\ldots$ et donc $\sigma = 4,1$ au dixième près.

2) La probabilité demandée est $P(T \geqslant 18)$. La calculatrice fournit

$$P(T \geqslant 18) = 0,16 \text{ arrondi au centième.}$$

Partie B

1) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



D'après la formule des probabilités totales,

$$P(O) = P(R)\times P_R(O) + P\left(\overline{R}\right)\times P_{\overline{R}}(O) = \frac{1}{2}\times p + \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{2}p + \frac{1}{6}.$$

2) a) Ici, $n = 1500$. D'autre part, la fréquence de « oui » observée est $f = \dfrac{625}{1500} = \dfrac{5}{12}$. On note que $n \geqslant 30$, $nf = 625$ et donc $nf \geqslant 5$ et enfin $n(1-f) = 875$ et donc $n(1-f) \geqslant 5$.

Un intervalle de confiance de la proportion q au niveau de confiance 95% est

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[\frac{5}{12} - \frac{1}{\sqrt{1500}}, \frac{5}{12} + \frac{1}{\sqrt{1500}}\right] = [0,39; 0,45]$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle.

b) $\dfrac{5}{12} - \dfrac{1}{\sqrt{1500}} \leqslant \dfrac{1}{2}p + \dfrac{1}{6} \leqslant \dfrac{5}{12} + \dfrac{1}{\sqrt{1500}} \Leftrightarrow \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{\sqrt{1500}} \leqslant \dfrac{1}{2}p \leqslant \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{\sqrt{1500}} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{\sqrt{1500}} \leqslant p \leqslant \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\sqrt{1500}}$.

Un intervalle de confiance de la proportion p au niveau de confiance 95% est

$$\left[\frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{1500}}, \frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{1500}}\right] = [0,44; 0,56]$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle.

Au niveau de confiance 95%, on peut affirmer que $0,44 \leqslant p \leqslant 0,56$.

