Polynésie 2016. Enseignement spécifique

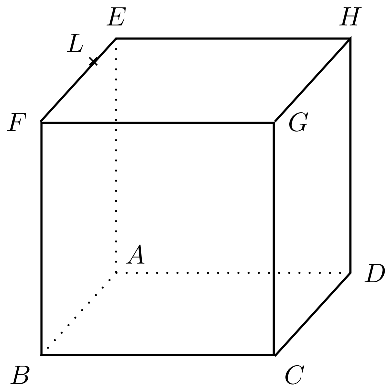
EXERCICE 4 (5 points) (Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1) Proposition 1 :
Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé, les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = \sqrt{2} + 3i$, $z_B = 1 + i$ et $z_C = -4i$ ne sont pas alignés.

2) Proposition 2 :
Il n'existe pas d'entier naturel n non nul tel que $[i(1+i)]^{2n}$ soit un réel strictement positif.

3) $ABCDEFGH$ est un cube de côté 1. Le point L est tel que $\overrightarrow{EL} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{EF}$.



Proposition 3 :
La section du cube par le plan (BDL) est un triangle.

Proposition 4 :
Le triangle DBL est rectangle en B.

4) On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[2\,;5]$ et dont on connaît le tableau de variations donné ci-dessous :

x	2	3	4	5
Variations de f	3 ↘	0 ↗	1 ↗	2

Proposition 5 :
L'intégrale $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x$ est comprise entre $1,5$ et 6.

Polynésie 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

1) Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives $(\sqrt{2}, 3)$, $(1, 1)$ et $(0, -4)$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$. De plus,

$$\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 5\sqrt{2} - 7 \neq 0.$$

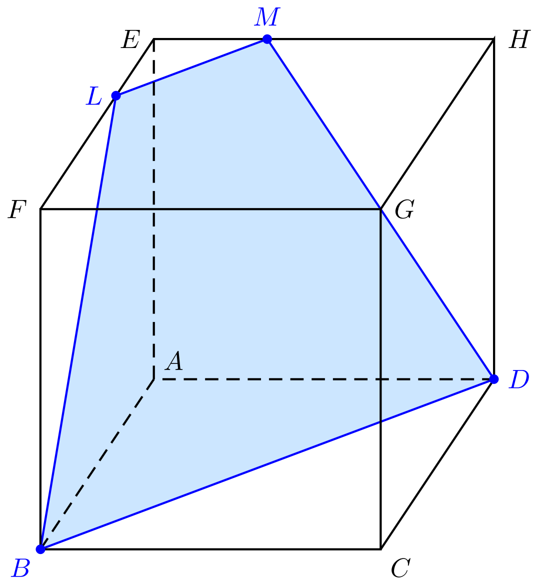
Donc, les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ ne sont pas colinéaires ou encore les points A, B et C ne sont pas alignés.

La proposition 1 est vraie.

2) $i(1+i) = -1+i$ puis $(-1+i)^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$ puis $(-1+i)^4 = (-2i)^2 = -4$ puis $(-1+i)^8 = (-4)^2 = 16$. Donc, $(i(1+i))^{2\times 4} = 16$ et l'entier 4 est un entier n tel que $(i(1+i))^{2n}$ soit un réel strictement positif.

La proposition 2 est fausse.

3) Les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles. Le plan (BDL) est sécant au plan (ABC) en la droite (BD) et donc le plan (BDL) est sécant au plan (EFG) en la droite (Δ) passant par L est parallèle à la droite (BD). La droite (Δ) est sécante à la droite (EH) en un point M. La section du cube par le plan (BDL) est le trapèze $BDML$.



La proposition 3 est fausse.

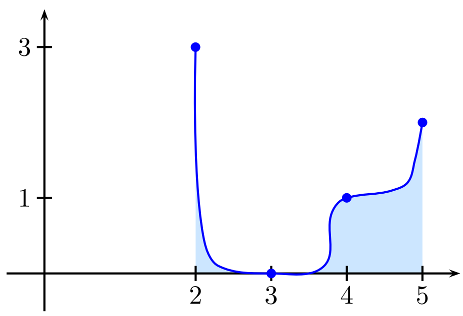
La droite (BF) est perpendiculaire au plan (ABC) et donc orthogonale à toute droite de ce plan. On en déduit que $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BF} = 0$. Mais alors,

$$\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{BD}.\left(\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FL}\right) = \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{FL} = \overrightarrow{FH}.\overrightarrow{FL}.$$

Les droites (FH) et (FL) ne sont pas perpendiculaires et donc $\overrightarrow{FH}.\overrightarrow{FL} \neq 0$ puis $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BL} \neq 0$. Ainsi, le triangle DBL n'est pas rectangle en B.

La proposition 4 est fausse.

4) Exemple de graphe.



Puisque la fonction f est positive, $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,dx$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine du plan compris entre l'axe des abscisses et la courbe de f d'une part, et les droites d'équations respectives $x = 2$ et $x = 5$ d'autre part. Avec le graphique ci-dessus, on comprend que cette aire peut être aussi proche qu'on le désire de 1 et en particulier, on comprend que cette aire peut être strictement plus petite que $1,5$. Donc,

$$\boxed{\text{La proposition 5 est fausse.}}$$

