

EXERCICE 4 : corrigé

$$1) \text{ a) } \left| 1 + i \frac{\sqrt{3}}{3} \right| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2} = \sqrt{1 + \frac{3}{9}} = \sqrt{\frac{12}{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ puis}$$

$$1 + i \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}{2 \times 3} i \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i \frac{\pi}{6}}.$$

$$1 + i \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i \frac{\pi}{6}}.$$

$$b) z_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i \frac{\pi}{6}} \times z_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i \frac{\pi}{6}} \text{ et } z_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i \frac{\pi}{6}} \times z_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} e^{i \frac{\pi}{6}} \right)^2 = \frac{4}{3} e^{i \frac{\pi}{3}}.$$

$$z_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i \frac{\pi}{6}} \text{ et } z_2 = \frac{4}{3} e^{i \frac{\pi}{3}}.$$

2) a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^n e^{i n \frac{\pi}{6}}$.

- $\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^0 e^{i 0 \frac{\pi}{6}} = 1 = z_0$. L'égalité à démontrer est donc vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que $z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^n e^{i n \frac{\pi}{6}}$. Alors

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= \left(1 + i \frac{\sqrt{3}}{3} \right) z_n \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i \frac{\pi}{6}} \times z_n \text{ (d'après 1)} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i \frac{\pi}{6}} \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^n e^{i n \frac{\pi}{6}} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{n+1} e^{i(n+1) \frac{\pi}{6}} \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\text{pour tout entier naturel } n, z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^n e^{i n \frac{\pi}{6}}.$$

b) Pour tout entier naturel n , A_n a pour coordonnées $\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^n \cos \left(\frac{n\pi}{6} \right), \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^n \sin \left(\frac{n\pi}{6} \right) \right)$ et donc le vecteur $\overrightarrow{OA_n}$ a pour coordonnées $\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^n \cos \left(\frac{n\pi}{6} \right), \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^n \sin \left(\frac{n\pi}{6} \right) \right)$. Le point A_0 a pour coordonnées $(1, 0)$ et donc le vecteur $\overrightarrow{OA_0}$ a pour coordonnées $(1, 0)$.

$$\begin{aligned} O, A_0, A_n \text{ alignés} &\Leftrightarrow \overrightarrow{OA_0} \text{ et } \overrightarrow{OA_n} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow 1 \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^n \sin \left(\frac{n\pi}{6} \right) - 0 \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^n \cos \left(\frac{n\pi}{6} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^n \sin \left(\frac{n\pi}{6} \right) = 0 \Leftrightarrow \sin \left(\frac{n\pi}{6} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{il existe } k \in \mathbb{N} \text{ tel que } \frac{n\pi}{6} = k\pi \text{ (car } n \text{ est un entier naturel)} \\ &\Leftrightarrow \text{il existe } k \in \mathbb{N} \text{ tel que } n = 6k. \end{aligned}$$

Les entiers n pour lesquels les points O , A_0 et A_n sont alignés sont les multiples de 6.

3) a) Pour tout entier naturel n , $d_n = A_n A_{n+1}$.

$$b) d_0 = |z_1 - z_0| = \left| 1 + i \frac{\sqrt{3}}{3} - 1 \right| = \left| i \frac{\sqrt{3}}{3} \right| = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$d_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

c) Soit n un entier naturel.

$$z_{n+2} - z_{n+1} = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_{n+1} - \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_n = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) (z_{n+1} - z_n).$$

d) Pour tout entier naturel n ,

$$d_{n+1} = |z_{n+2} - z_{n+1}| = \left|1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right| |z_{n+1} - z_n| = \frac{2}{\sqrt{3}} d_n \text{ (d'après 1))}.$$

Ainsi, la suite $(d_n)_{n \geq 0}$ est la suite géométrique de premier terme $d_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et de raison $q = \frac{2}{\sqrt{3}}$. On en déduit que pour tout entier naturel n ,

$$d_n = d_0 \times q^n = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n.$$

$$\text{Pour tout entier naturel } n, d_n = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n.$$

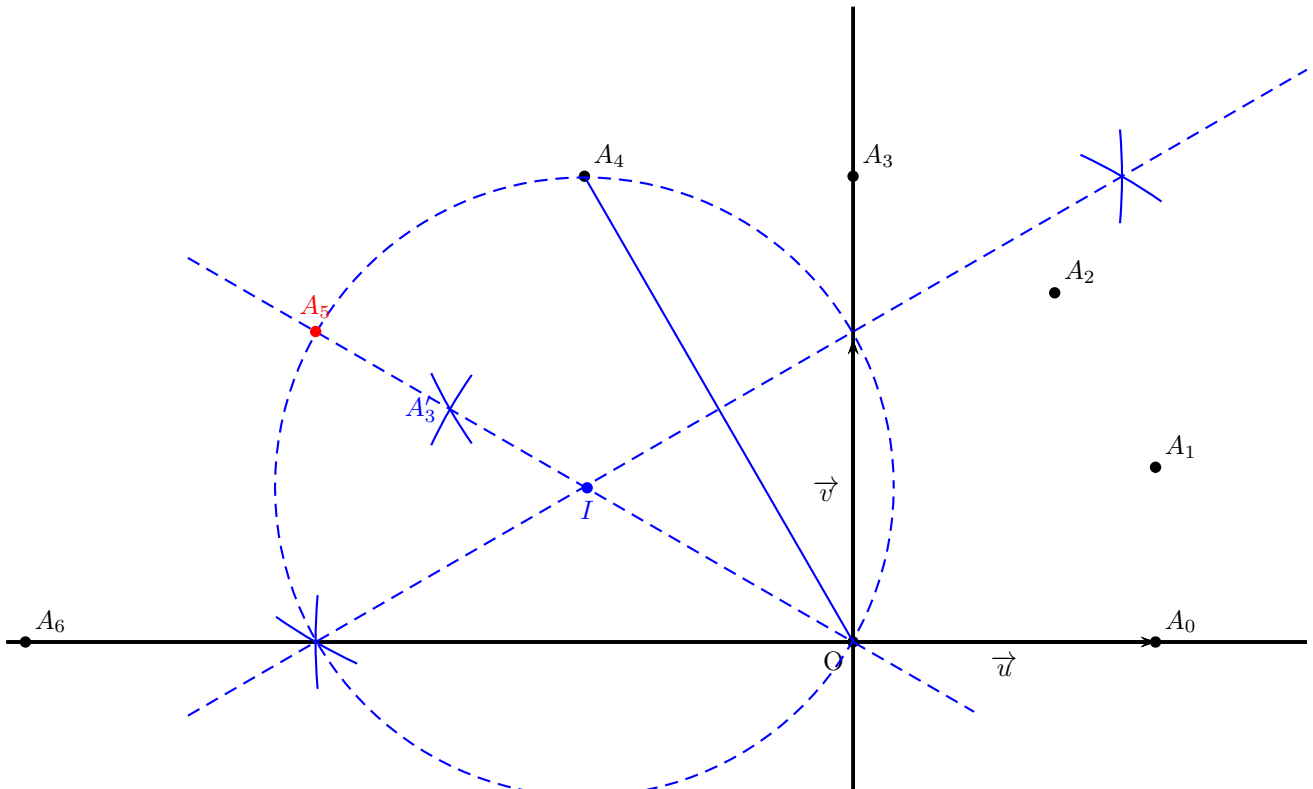
4) a) Soit n un entier naturel. D'après la question 2)a), $|z_n| = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$ et donc

$$\begin{aligned} |z_n|^2 + d_n^2 &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} = \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} = \frac{4}{3} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} \\ &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n+2} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2(n+1)} \\ &= |z_{n+1}|^2. \end{aligned}$$

$$\text{Pour tout entier naturel } n, |z_{n+1}|^2 = |z_n|^2 + d_n^2.$$

b) On en déduit que pour tout entier naturel n , $OA_{n+1}^2 = OA_n^2 + A_n A_{n+1}^2$. D'après la réciproque du théorème de PYTHAGORE, le triangle $OA_n A_{n+1}$ est rectangle en A_n .

c)



d) • Pour tout entier nature n , $(\vec{u}, \overrightarrow{OA_n}) = \arg(z_n) = n\frac{\pi}{6} [2\pi]$ puis

$$(\overrightarrow{OA_n}, \overrightarrow{OA_{n+1}}) = (\overrightarrow{OA_n}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{OA_{n+1}}) = -n\frac{\pi}{6} + (n+1)\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} [2\pi].$$

• En particulier, $(\overrightarrow{OA_3}, \overrightarrow{OA_5}) = (\overrightarrow{OA_3}, \overrightarrow{OA_4}) + (\overrightarrow{OA_4}, \overrightarrow{OA_5}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

Soit A'_3 le point d'abscisse négative tel que le triangle $OA_3A'_3$ soit équilatéral. Alors, $(\overrightarrow{OA_3}, \overrightarrow{OA'_3}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$ et la demi-droite $[OA_5)$ est encore la demi-droite $[OA'_3)$. On obtient le point A'_3 comme intersection du cercle de centre O passant par A_3 et du cercle de centre A_3 passant par O puis on trace la demi-droite $[OA'_3)$.

• Le triangle OA_4A_5 est rectangle en A_4 . Donc, le cercle circonscrit au triangle OA_4A_5 est le cercle de diamètre $[OA_5]$. Le centre I de ce cercle est à égale distance de O et A_4 . On construit donc au compas la médiatrice du segment $[OA_4]$. Cette médiatrice coupe $[OA'_3)$ en I . On trace ensuite le cercle de centre I passant par O . Il recoupe la demi-droite $[OA'_3)$ en A_5 .