Nouvelle Calédonie mars 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

On considère les nombres complexes z_n définis, pour tout entier naturel n, par

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_n.$$

On note A_n le point d'affixe z_n dans le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de l'annexe 2.
L'objet de cet exercice est d'étudier la construction des points A_n.

1) a) Vérifier que $1 + i\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

b) En déduire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

2) a) Montrer que pour tout entier naturel n,

$$z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}}.$$

b) Pour quelles valeurs de n, les points O, A_0 et A_n sont-ils alignés ?

3) Pour tout entier naturel n, on pose $d_n = |z_{n+1} - z_n|$.

a) Interpréter géométriquement d_n.

b) Calculer d_0.

c) Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$z_{n+2} - z_{n+1} = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n).$$

d) En déduire que la suite $(d_n)_{n\geqslant 0}$ est géométrique puis que pour tout entier naturel n,

$$d_n = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n.$$

4) a) Montrer que pour tout entier naturel n,

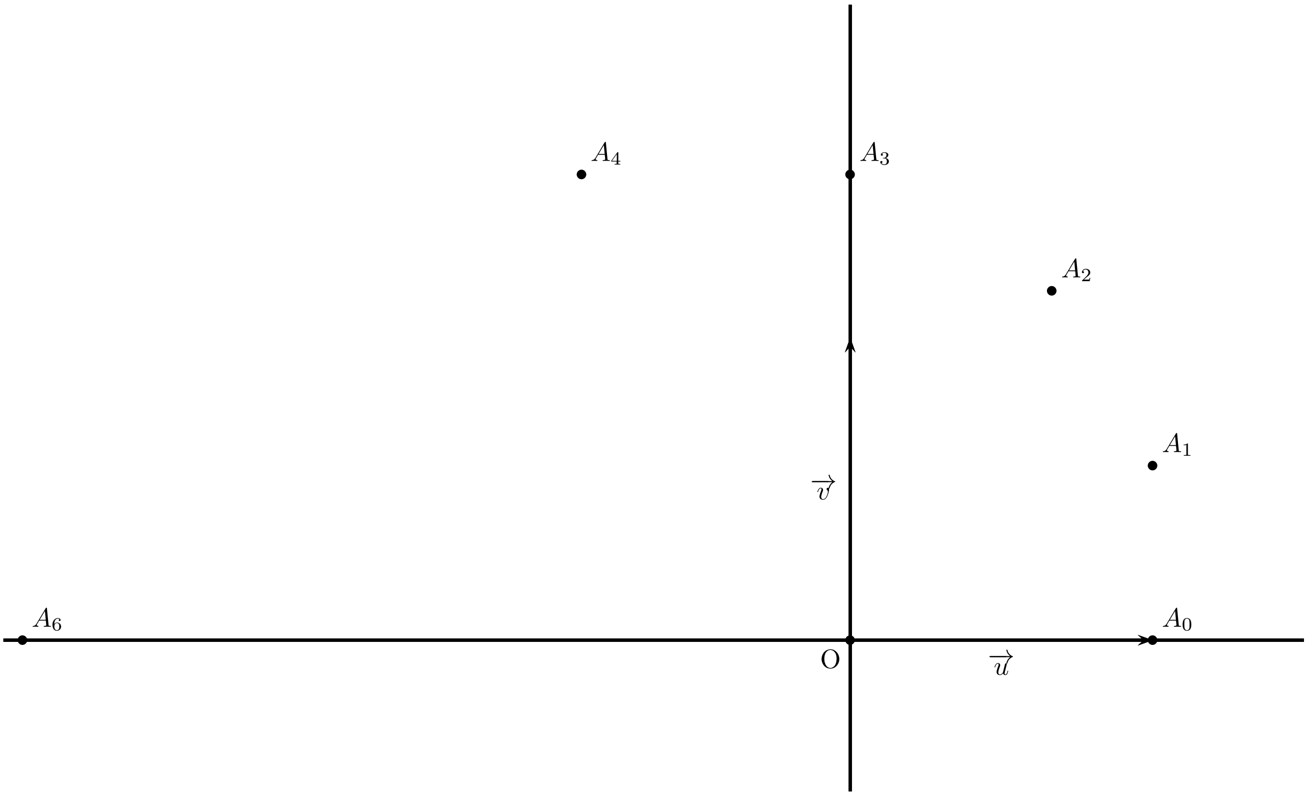
$$|z_{n+1}|^2 = |z_n|^2 + d_n^2.$$

b) En déduire que, pour tout entier naturel n, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n.

c) Construire, à la règle non graduée et au compas, le point A_5 sur la figure de l'annexe 2 à rendre avec la copie.

d) Justifier cette construction.

ANNEXE 2 de l'exercice 4



Nouvelle Calédonie mars 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

1) a) $\left|1+i\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right| = \sqrt{1^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{1+\dfrac{3}{9}} = \sqrt{\dfrac{12}{9}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ puis

$$1+i\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{2\times 3}i\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

$$\boxed{1+i\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}.}$$

b) $z_1 = \dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}\times z_0 = \dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $z_1 = \dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}\times z_1 = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^2 = \dfrac{4}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$.

$$\boxed{z_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}} \text{ et } z_2 = \frac{4}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}.}$$

2) a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $z_n = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}}$.

- $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^0 e^{i0\frac{\pi}{6}} = 1 = z_0$. L'égalité à démontrer est donc vraie quand $n=0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $z_n = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}}$. Alors

$$\begin{aligned}
z_{n+1} &= \left(1+i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)z_n \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}\times z_n \text{ (d'après 1))} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}\times\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} e^{i(n+1)\frac{\pi}{6}}
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}}.}$$

b) Pour tout entier naturel n, A_n a pour coordonnées $\left(\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\cos\left(\dfrac{n\pi}{6}\right), \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\sin\left(\dfrac{n\pi}{6}\right)\right)$ et donc le vecteur $\overrightarrow{OA_n}$ a pour coordonnées $\left(\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\cos\left(\dfrac{n\pi}{6}\right), \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\sin\left(\dfrac{n\pi}{6}\right)\right)$. Le point A_0 a pour coordonnées $(1,0)$ et donc le vecteur $\overrightarrow{OA_0}$ a pour coordonnées $(1,0)$.

$$\begin{aligned}
O,\ A_0,\ A_n \text{ alignés} &\Leftrightarrow \overrightarrow{OA_0} \text{ et } \overrightarrow{OA_n} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow 1\times\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) - 0\times\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \text{ il existe } k\in\mathbb{N} \text{ tel que } \frac{n\pi}{6} = k\pi \text{ (car } n \text{ est un entier naturel)} \\
&\Leftrightarrow \text{il existe } k\in\mathbb{N} \text{ tel que } n = 6k.
\end{aligned}$$

Les entiers n pour lesquels le points O, A_0 et A_n sont alignés sont les multiples de 6.

3) a) Pour tout entier naturel n, $d_n = A_nA_{n+1}$.

b) $d_0 = |z_1 - z_0| = \left|1+i\dfrac{\sqrt{3}}{3}-1\right| = \left|i\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right| = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

$$\boxed{d_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}.}$$

c) Soit n un entier naturel.

$$z_{n+2} - z_{n+1} = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_{n+1} - \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_n = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n).$$

d) Pour tout entier naturel n,

$$d_{n+1} = |z_{n+2} - z_{n+1}| = \left|1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right| |z_{n+1} - z_n| = \frac{2}{\sqrt{3}} d_n \text{ (d'après 1)).}$$

Ainsi, la suite $(d_n)_{n\geqslant 0}$ est la suite géométrique de premier terme $d_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et de raison $q = \frac{2}{\sqrt{3}}$. On en déduit que pour tout entier naturel n,

$$d_n = d_0 \times q^n = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ d_n = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n.}$$

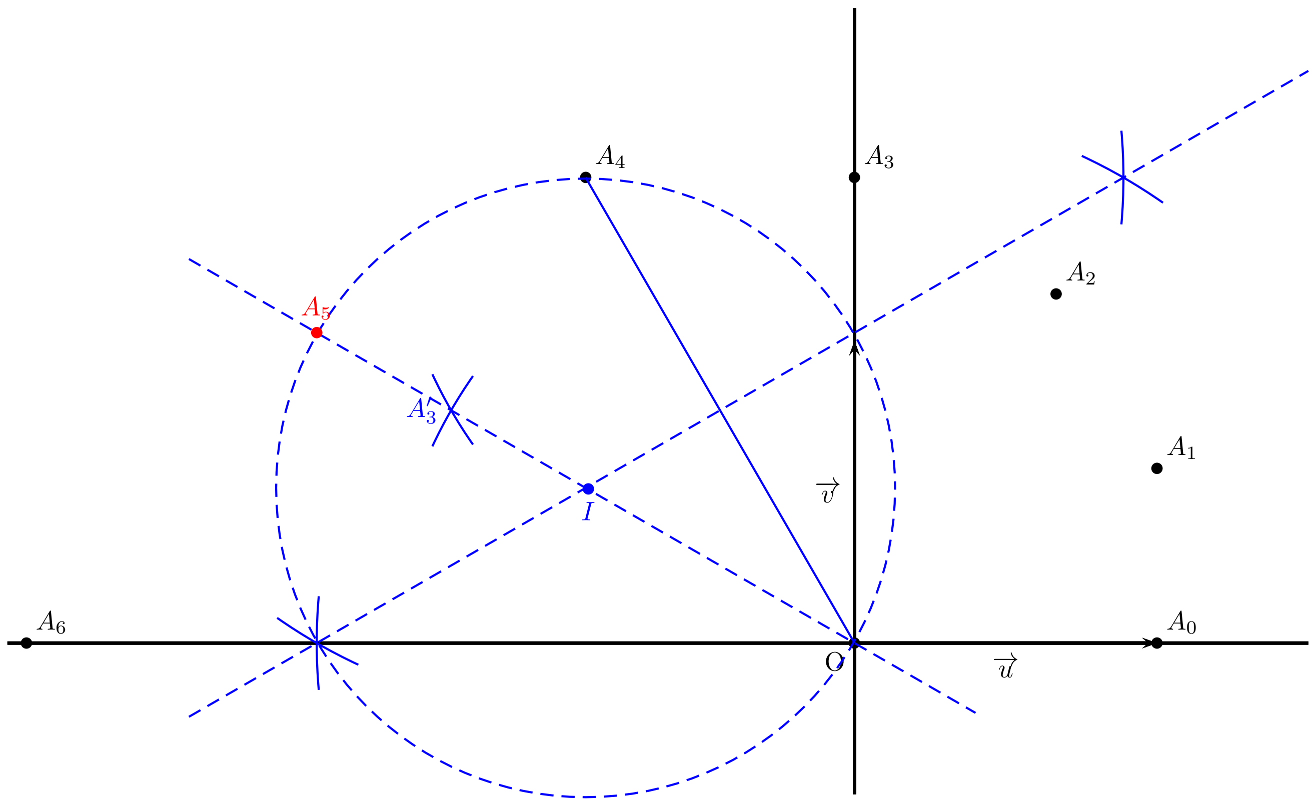
4) a) Soit n un entier naturel. D'après la question 2)a), $|z_n| = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$ et donc

$$\begin{aligned}|z_n|^2 + d_n^2 &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} = \left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} = \frac{4}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} \\ &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n+2} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2(n+1)} \\ &= |z_{n+1}|^2.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ |z_{n+1}|^2 = |z_n|^2 + d_n^2.}$$

b) On en déduit que pour tout entier naturel n, $OA_{n+1}^2 = OA_n^2 + A_nA_{n+1}^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n.

c)



d) • Pour tout entier nature n, $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OA_n}\right) = \arg(z_n) = n\dfrac{\pi}{6}$ $[2\pi]$ puis

$$\left(\overrightarrow{OA_n}, \overrightarrow{OA_{n+1}}\right) = \left(\overrightarrow{OA_n}, \overrightarrow{u}\right) + \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OA_{n+1}}\right) = -n\frac{\pi}{6} + (n+1)\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}\ [2\pi].$$

• En particulier, $\left(\overrightarrow{OA_3}, \overrightarrow{OA_5}\right) = \left(\overrightarrow{OA_3}, \overrightarrow{OA_4}\right) + \left(\overrightarrow{OA_4}, \overrightarrow{OA_5}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ $[2\pi]$.

Soit A_3' le point d'abscisse négative tel que le triangle OA_3A_3' soit équilatéral. Alors, $\left(\overrightarrow{OA_3}, \overrightarrow{OA_3'}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ $[2\pi]$ et la demi-droite $[OA_5)$ est encore la demi-droite $[OA_3')$. On obtient le point A_3' comme intersection du cercle de centre O passant par A_3 et du cercle de centre A_3 passant par O puis on trace la demi-droite $[OA_3')$.

• Le triangle OA_4A_5 est rectangle en A_4. Donc, le cercle circonscrit au triangle OA_4A_5 est le cercle de diamètre $[OA_5]$. Le centre I de ce cercle est à égale distance de O et A_4. On construit donc au compas la médiatrice du segment $[OA_4]$. Cette médiatrice coupe $[OA_3')$ en I. On trace ensuite le cercle de centre I passant par O. Il recoupe la demi-droite $[OA_3')$ en A_5.

