Nouvelle Calédonie mars 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (6 points) (commun à tous les candidats)

Dans le repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ de l'espace, on considère pour tout réel m, le plan P_m d'équation

$$\frac{1}{4}m^2x + (m-1)y + \frac{1}{2}mz - 3 = 0.$$

1) Pour quelle(s) valeur(s) de m le point $A(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$ appartient-il au plan P_m ?

2) Montrer que les plans P_1 et P_{-4} sont sécants selon la droite (d) de représentation paramétrique

$$(d)\ \left\{\begin{array}{l} x = 12 - 2t \\ y = 9 - 2t \\ z = t \end{array}\right. \qquad \text{avec}\ \ t \in \mathbb{R}.$$

3) a) Montrer que l'intersection entre P_0 et (d) est un point noté B dont on déterminera les coordonnées.

b) Justifier que pour tout réel m, le point B appartient au plan P_m.

c) Montrer que le point B est l'unique point appartenant à P_m pour tout réel m.

4) Dans cette question, on considère deux entiers relatifs m et m' tels que

$$-10 \leqslant m \leqslant 10 \quad \text{et} \quad -10 \leqslant m' \leqslant 10.$$

On souhaite déterminer les valeurs de m et de m' pour lesquelles P_m et $P_{m'}$ sont perpendiculaires.

a) Vérifier que P_1 et P_{-4} sont perpendiculaires.

b) Montrer que les plans P_m et $P_{m'}$ sont perpendiculaires si et seulement si

$$\left(\frac{mm'}{4}\right)^2 + (m-1)(m'-1) + \frac{mm'}{4} = 0.$$

c) On donne l'algorithme suivant :

Variables :	m et m' entiers relatifs

Traitement :	Pour m allant de -10 à 10 :
	    Pour m' allant de -10 à 10 :
	        Si $(mm')^2 + 16(m-1)(m'-1) + 4mm' = 0$
	            Alors Afficher $(m\ ;\ m')$
	    Fin du Pour
	Fin du Pour

Quel est le rôle de cet algorithme ?

d) Cet algorithme affiche six couples d'entiers dont $(-4\ ;\ 1)$, $(0\ ;\ 1)$ et $(5\ ;\ -4)$.
Écrire les six couples dans l'ordre d'affichage de l'algorithme.

Nouvelle Calédonie mars 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

1) Soit m un réel.

$$\begin{aligned} A \in P_m &\Leftrightarrow \frac{1}{4}m^2x_A + (m-1)y_A + \frac{1}{2}mz_A - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{4}m^2 + (m-1) + \frac{1}{2}m - 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}m^2 + \frac{3}{2}m - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow m^2 + 6m - 16 = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant de l'équation $x^2 + 6x - 16 = 0$ est $\Delta = 6^2 - 4 \times 1 \times (-16) = 100 > 0$. L'équation $x^2 + 6x - 16 = 0$ admet deux solutions réelles distinctes $x_1 = \dfrac{-6 + \sqrt{100}}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-6 - \sqrt{100}}{2} = -8$.

Les valeurs de m pour lesquelles le point A appartient au plan P_m sont -8 et 2.

2) P_1 est le plan d'équation $\dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}z - 3 = 0$ ou encore $x + 2z - 12 = 0$. P_{-4} est le plan d'équation $4x - 5y - 2z - 3 = 0$.

Un vecteur normal au plan P_1 est le vecteur $\overrightarrow{n_1}$ de coordonnées $(1, 0, 2)$ et un vecteur normal au plan P_{-4} est le vecteur $\overrightarrow{n_{-4}}$ de coordonnées $(4, -5, -2)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_{-4}}$ ne sont pas colinéaires (en analysant la deuxième coordonnée) et donc les plans P_1 et P_{-4} ne sont pas parallèles et donc les plans P_1 et P_{-4} sont sécants en une droite que l'on note (D). Vérifions que $(D) = (d)$.

Soit $M(12 - 2t, 9 - 2t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de (d).

$$x_M + 2z_M - 12 = (12 - 2t) + 2t - 12 = 0.$$

Donc, tout point M de (d) appartient au plan P_1.

$$4x_M - 5y_M - 2z_M - 3 = 4(12 - 2t) - 5(9 - 2t) - 2t - 3 = 48 - 8t - 45 + 10t - 2t - 3 = 0.$$

Donc, tout point M de (d) appartient au plan P_{-4}. Ainsi, la droite (d) est la droite d'intersection des plans P_1 et P_{-4}.

3) a) P_0 est le plan d'équation $-y - 3 = 0$ ou encore $y + 3 = 0$. Soit $M(12 - 2t, 9 - 2t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de (d).

$$M \in P_0 \Leftrightarrow y_M + 3 = 0 \Leftrightarrow 9 - 2t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = 6.$$

Pour $t = 6$, on obtient le point B de coordonnées $(0, -3, 6)$.

b) Soit m un réel.

$$\frac{1}{4}m^2x_B + (m-1)y_B + \frac{1}{2}mz_B - 3 = -3(m-1) + 3m - 3 = 0.$$

Donc, le point B apprtient à tous les plans P_m, $m \in \mathbb{R}$.

c) Un point appartenant à tous les plans P_m appartient nécessairement aux plans P_0, P_1 et P_{-4} et donc au plan P_0 et à la droite (d). Un tel point est donc nécessairement le point B.

Le point B est l'unique point de l'espace appartenant à tous les plans P_m, $m \in \mathbb{R}$.

4) a) Avec les notations de la question 2),

$$\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_{-4}} = 1 \times 4 + 0 \times (-5) + 2 \times (-2) = 0.$$

Donc, les plans P_1 et P_{-4} sont perpendiculaires.
b) Soient m et m' deux réels. Un vecteur normal au plan P_m (resp. $P_{m'}$) est le vecteur $\overrightarrow{n_m}$ (resp. $\overrightarrow{n_{m'}}$) de coordonnées $\left(\dfrac{m^2}{4}, (m-1), \dfrac{m}{2}\right)$ (resp. $\left(\dfrac{m'^2}{4}, (m'-1), \dfrac{m'}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} P_m \perp P_{m'} &\Leftrightarrow \overrightarrow{n_m}.\overrightarrow{n_{m'}} = 0 \Leftrightarrow \frac{m^2}{4}\frac{m'^2}{4} + (m-1)(m'-1) + \frac{m}{2}\frac{m'}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{mm'}{4}\right)^2 + (m-1)(m'-1) + \frac{mm'}{4} = 0. \end{aligned}$$

c) Cette dernière condition équivaut à $(mm')^2 + 16(m-1)(m'-1) + 4mm' = 0$ (après multiplication par 16 des deux membres de l'égalité).

L'algorithme affiche tous les couples (m, m') d'entiers relatifs compris au sens large entre -10 et 10 tels que les plans P_m et $P_{m'}$ soient perpendiculaires.

d) Si (m, m') est un couple solution, alors (m', m) est un couple solution. Donc, le problème admet au moins les six couples solutions $(-4, 1)$, $(0, 1)$, $(5, -4)$, $(1, -4)$, $(1, 0)$, $(-4, 5)$. L'énoncé dit que l'algorithme affiche exactement six couples solutions et donc l'algorithme affiche dans l'ordre les couples

$$(-4, 1) \quad (-4, 5) \quad (0, 1) \quad (1, -4) \quad (1, 0) \quad (5, -4).$$

