Liban 2016. Enseignement de spécialité

EXERCICE 4 (5 points) (candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Un point est attribué par réponse exacte justifiée. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte et l'absence de réponse n'est pas pénalisée.

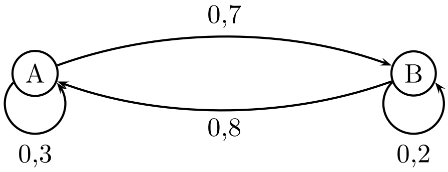
• On considère le système $\left\{\begin{array}{ll} n \equiv 1 & [5] \\ n \equiv 3 & [4] \end{array}\right.$ d'inconnue n entier relatif.

Affirmation 1 : Si n est solution de ce système alors $n - 11$ est divisible par 4 et par 5.

Affirmation 2 : Pour tout entier relatif k, l'entier $11 + 20k$ est solution du système.

Affirmation 3 : Si un entier relatif n est solution du système alors il existe un entier relatif k tel que $n = 11 + 20k$.

• Un automate peut se trouver dans deux états A ou B. À chaque seconde, il peut soit rester dans l'état où il se trouve, soit en changer, avec des probabilités données par le graphe probabiliste ci-dessous.
Pour tout entier naturel n, on note a_n la probabilité que l'automate se trouve dans l'état A après n secondes et b_n la probabilité que l'automate se trouve dans l'état B après n secondes. Au départ, l'automate est dans l'état B.



On considère l'algorithme suivant :

Variables :	a et b sont des réels
Initialisation :	a prend la valeur 0 b prend la valeur 1
Traitement :	Pour k allant de 1 à 10 a prend la valeur $0,8a + 0,3b$ b prend la valeur $1 - a$ Fin Pour
Sortie :	Afficher a Afficher b

Affirmation 4 : En sortie, cet algorithme affiche les valeurs de a_{10} et b_{10} ».

Affirmation 5 : Après 4 secondes, l'automate a autant de chances d'être dans l'état A que d'être dans l'état B.

Liban 2016. Enseignement de spécialité

EXERCICE 4 : corrigé

1) Soit n un entier relatif.

$$\left\{\begin{array}{ll} n \equiv 1 & [5] \\ n \equiv 3 & [4] \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} n-11 \equiv -10 & [5] \\ n-11 \equiv -8 & [4] \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} n-11 \equiv 0 & [5] \\ n-11 \equiv 0 & [4] \end{array}\right.$$
$$\Rightarrow n-11 \text{ est divisible par 4 et par 5.}$$

L'affirmation 1 est vraie.

2) Soient k un entier relatif puis $n = 11 + 20k$.
$n = 1 + 10 + 20k = 1 + 5(2 + 4k)$ avec $2 + 4k$ entier relatif. Donc, $n \equiv 1 \quad [5]$.
$n = 3 + 8 + 20k = 3 + 4(2 + 5k)$ avec $2 + 5k$ entier relatif. Donc, $n \equiv 3 \quad [4]$.

l'affirmation 2 est vraie.

3) Soit n un entier relatif solution du système. Alors, $n-11$ est divisible par 4 et par 5 d'après la question 1). Puisque les entiers 4 et 5 sont premiers entre eux, $n-11$ est divisible par $4 \times 5 = 20$. Par suite, il existe un entier relatif k tel que $n - 11 = 20k$ ou encore $n = 11 + 20k$.

L'affirmation 3 est vraie.

4) Notons A_n (respectivement B_n) l'événement « à l'instant n, l'automate est dans l'état A (respectivement B) ». D'après la formule des probabilités totales,

$$a_{n+1} = P\left(A_{n+1}\right) = P\left(A_n\right) \times P_{A_n}\left(A_{n+1}\right) + P\left(B_n\right) \times P_{B_n}\left(A_{n+1}\right) = 0,3a_n + 0,8b_n.$$

Dans la partie « traitement » de l'algorithme devrait être écrit « a prend la valeur $0,3a + 0,8b$ » et non pas « a prend la valeur $0,8a + 0,3b$ »

L'affirmation 4 est fausse.

5) • $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$.
• $a_1 = 0,3a_0 + 0,8b_0 = 0,8$ et $b_1 = 1 - a_1 = 0,2$.
• $a_2 = 0,3 \times 0,8 + 0,8 \times 0,2 = 0,4$ et $b_2 = 1 - a_2 = 0,6$.
• $a_3 = 0,3 \times 0,4 + 0,8 \times 0,6 = 0,6$ et $b_3 = 1 - a_3 = 0,4$.
• $a_4 = 0,3 \times 0,6 + 0,8 \times 0,4 = 0,5$ et $b_4 = 1 - a_4 = 0,5$.

L'affirmation 5 est vraie.

