Liban 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (4 points) (commun à tous les candidats)

Sur un court de tennis, un lance-balle permet à un joueur de s'entraîner seul. Cet appareil envoie des balles une par une à une cadence régulière. Le joueur frappe alors la balle puis la balle suivante arrive.
Suivant le manuel du constructeur, le lance-balle envoie au hasard la balle à droite ou à gauche avec la même probabilité.

Dans tout l'exercice, on arrondira les résultats à 10^{-3} *près.*

Partie A

Le joueur s'apprête à recevoir une série de 20 balles.

1) Quelle est la probabilité que le lance-balle envoie 10 balles à droite ?

2) Quelle est la probabilité que le lance-balle envoie entre 5 et 10 balles à droite ?

Partie B

Le lance-balle est équipé d'un réservoir pouvant contenir 100 balles. Sur une séquence de 100 lancers, 42 balles ont été lancées à droite.
Le joueur doute alors du bon fonctionnement de l'appareil. Ses doutes sont-ils justifiés ?

Partie C

Pour augmenter la difficulté, le joueur paramètre le lance-balle de façon à donner un effet aux balles lancées. Elles peuvent être soit « liftées » soit « coupées ». La probabilité que le lance-balle envoie une balle à droite est toujours égale à la probabilité que le lance-balle envoie une balle à gauche.

Les réglages de l'appareil permettent d'affirmer que :

- la probabilité que le lance-balle envoie une balle liftée à droite est $0,24$;
- la probabilité que le lance-balle envoie une balle coupée à gauche est $0,235$.

Si le lance-balle envoie une balle coupée, quelle est la probabilité qu'elle soit envoyée à droite ?

Liban 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

Partie A

1) Notons X la variable aléatoire égale au nombre de balles à droite.
- 20 expériences identiques et indépendantes sont effectuées.
- chaque expérience a deux issues à savoir « la balle arrive à droite » avec une probabilité $p = \dfrac{1}{2}$ et « la balle arrive à gauche » avec une probabilité $1 - p = \dfrac{1}{2}$.

X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \dfrac{1}{2}$. La probabilité demandée est $P(X = 10)$. On sait que

$$P(X = 10) = \binom{20}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{\binom{20}{10}}{2^{20}}.$$

La calculatrice donne $P(X = 10) = 0,176$ arrondi à 10^{-3}.

2) La probabilité demandée est $P(5 \leqslant X \leqslant 10)$. La calculatrice donne $P(5 \leqslant X \leqslant 10) = 0,582$ arrondi à 10^{-3}.

Partie B

Ici, $n = 100$ et la probabilité p qu'une balle arrive à droite est $p = 0,5$. On note que $n \geqslant 30$, $np = n(1-p) = 50$ et donc $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$. un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% est

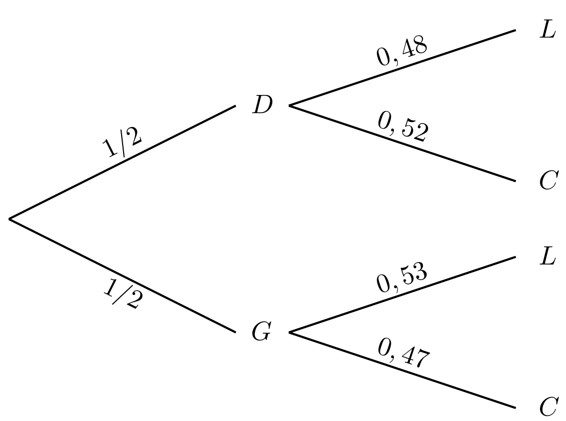
$$\left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,5 - 1,96\frac{\sqrt{0,5 \times 0,5}}{\sqrt{100}}; 0,5 - 1,96\frac{\sqrt{0,5 \times 0,5}}{\sqrt{100}}\right]$$
$$= [0,5 - 0,098; 0,5 + 0,098] = [0,402; 0,598]$$

La fréquence de balles à droite observée est $f = \dfrac{42}{100} = 0,42$. La fréquence observée appartient à l'intervalle de fluctuation et le joueur ne peut donc pas remettre en cause le bon fonctionnement de l'appareil.

Partie C

Notons respectivement D, G, L et C les événements « la balle est envoyée à droite », « la balle est envoyée à gauche », « la balle est liftée » et « la balle est coupée ». L'énoncé fournit $P(L \cap D) = 0,24$ et $P(C \cap G) = 0,235$. La probabilité demandée est $P_C(D)$.

$P_G(C) = \dfrac{P(G \cap C)}{P(G)} = \dfrac{0,235}{0,5} = 0,47$. De même, $P_D(L) = \dfrac{P(D \cap L)}{P(D)} = \dfrac{0,24}{0,5} = 0,48$. Représentons alors la situation par un arbre de probabilité.



D'après la formule des probabilités totales entre autres,

$$P_C(D) = \frac{P(C \cap D)}{P(C)} = \frac{p(D) \times P_D(C)}{P(D) \times P_D(C) + P(G) \times P_G(C)} = \frac{0,5 \times 0,52}{0,5 \times 0,52 + 0,5 \times 0,47} = \frac{0,26}{0,495}$$
$$= 0,525 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

