

Liban 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (4 points) (commun à tous les candidats)

On considère un solide $ADECBF$ constitué de deux pyramides identiques ayant pour base commune le carré $ABCD$ de centre I . Une représentation en perspective de ce solide est donnée **en annexe (à rendre avec la copie)**. Toutes les arêtes sont de longueur 1.

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AK})$.

1) a) Montrer que $IE = \frac{\sqrt{2}}{2}$. En déduire les coordonnées des points I , E et F .

b) Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABE) .

c) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABE) .

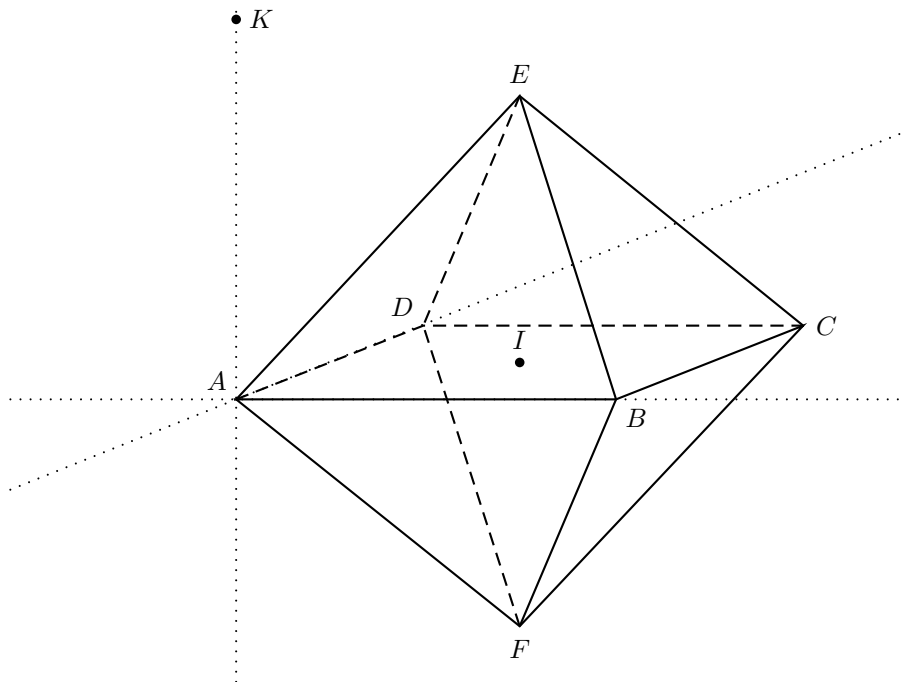
2) On nomme M le milieu du segment $[DF]$ et N celui du segment $[AB]$.

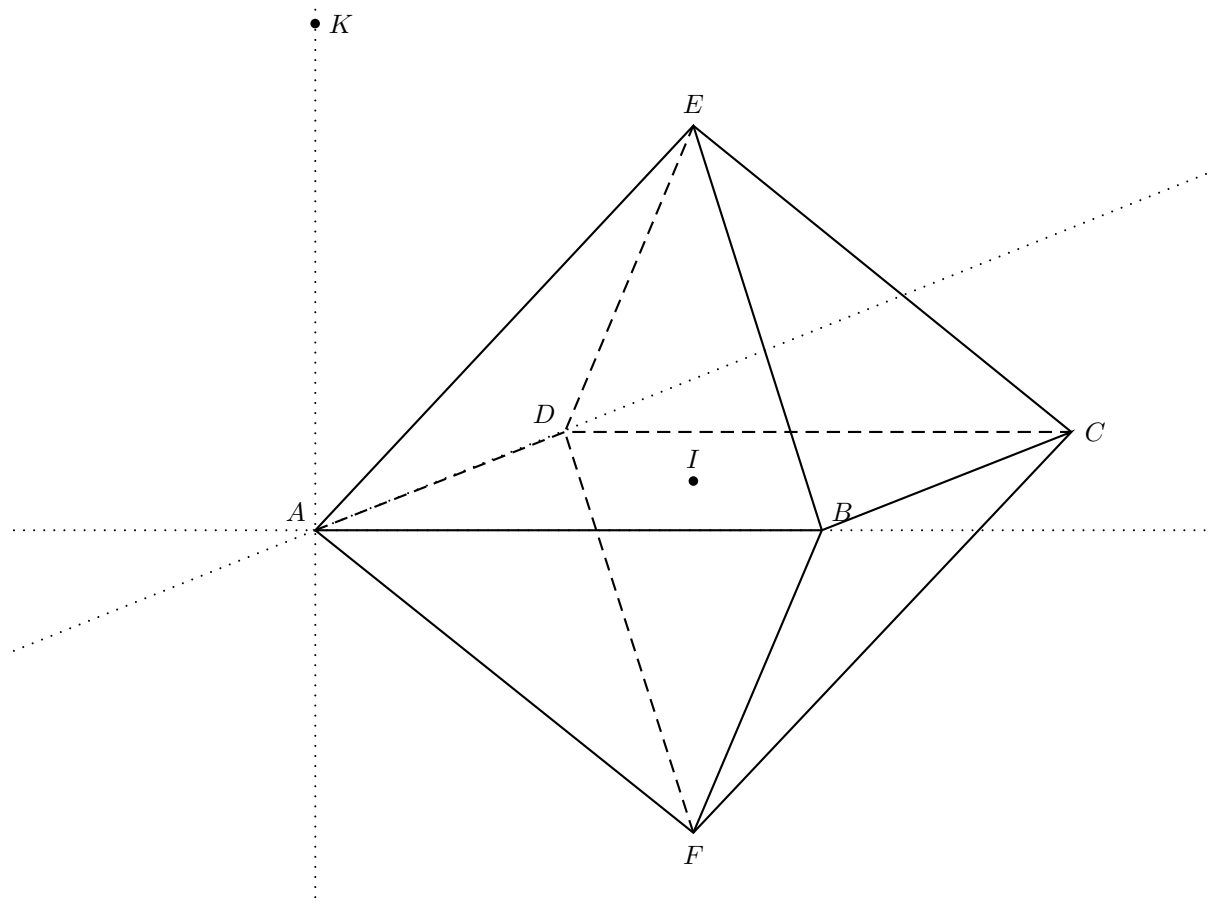
a) Démontrer que les plans (FDC) et (ABE) sont parallèles.

b) Déterminer l'intersection des plans (EMN) et (FDC) .

c) Construire sur l'**annexe (à rendre avec la copie)** la section du solide $ADECBF$ par le plan (EMN) .

EXERCICE 1





1) a) Les points A et C ont pour coordonnées respectives $(0, 0, 0)$ et $(1, 1, 0)$. Donc le point I a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$. Par suite,

$$AI^2 = \left(\frac{1}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 0\right)^2 + (0 - 0)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

La droite (IE) est perpendiculaire au plan (ABC) et donc la droite (IE) est orthogonale à toute droite de ce plan. En particulier, la droite (IE) est orthogonale à la droite (AI) . D'après le théorème de PYTHAGORE dans le triangle AEI , rectangle en I ,

$$IE^2 = AE^2 - AI^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

puis $IE = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

On a vu que le point I a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ et donc, les points E et F ont pour coordonnées respectives $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

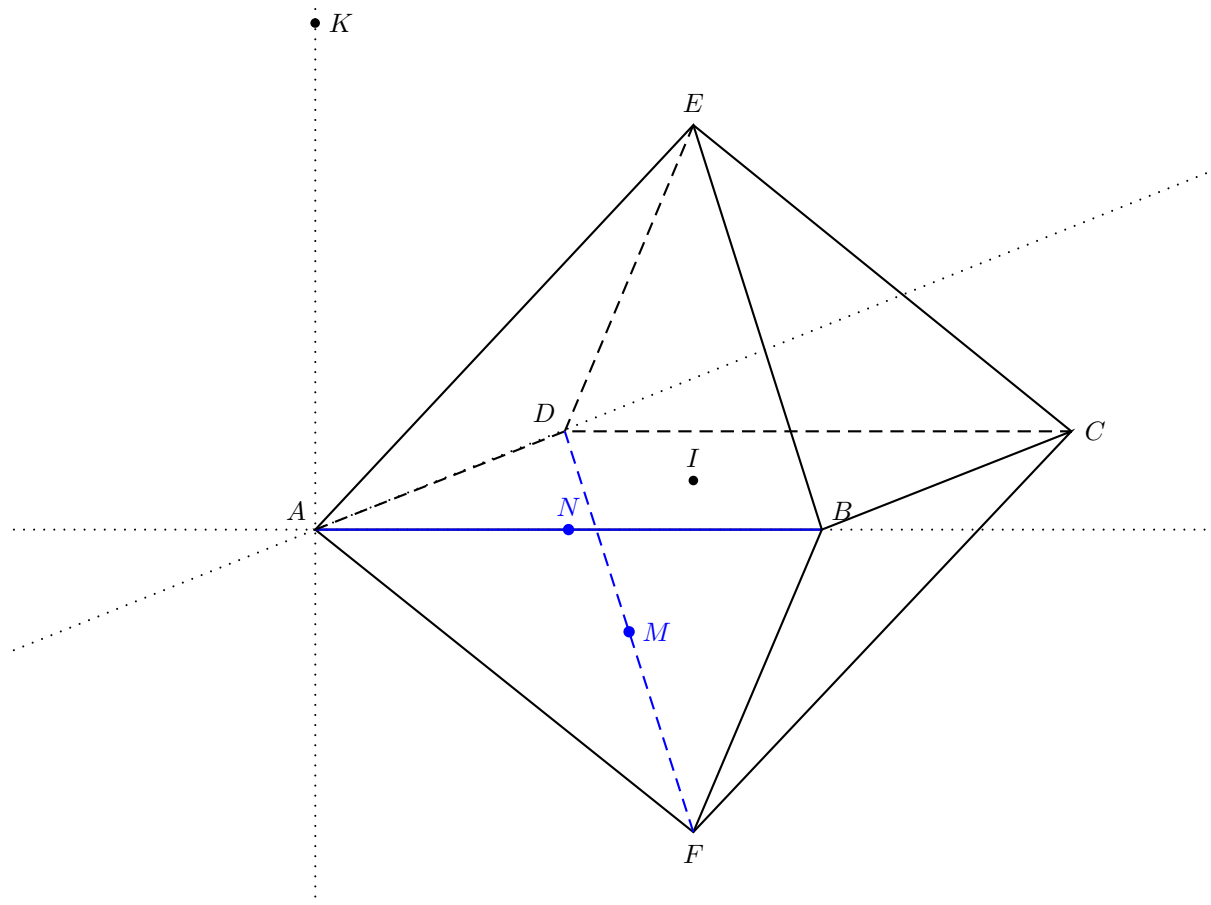
b) Les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AE} ont pour coordonnées respectives $(1, 0, 0)$ et $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. On note que ces vecteurs ne sont pas colinéaires (en analysant leur deuxième coordonnée).

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \times 1 - 2 \times 0 + \sqrt{2} \times 0 = 0 \text{ et } \vec{n} \cdot \overrightarrow{AE} = 0 \times \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{2} + \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -1 + \frac{2}{2} = 0.$$

Le vecteur \vec{n} est donc orthogonal aux vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AE} qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan (ABE) . On en déduit que le vecteur \vec{n} est un vecteur normal au plan (ABE) .

c) Le plan (ABE) est le plan passant par $A(0, 0, 0)$ et de vecteur normal $\vec{n}(0, -2, \sqrt{2})$. Une équation cartésienne du plan (ABE) est donc $-2y + \sqrt{2}z = 0$ ou encore $-\sqrt{2}y + z = 0$ après division des deux membres de l'équation par $\sqrt{2}$.

2) a)



Les points D , F et C ont pour coordonnées respectives $(0, 1, 0)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $(1, 1, 0)$. Le vecteur \overrightarrow{DC} a pour coordonnées $(1, 0, 0)$ et le vecteur \overrightarrow{DF} a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

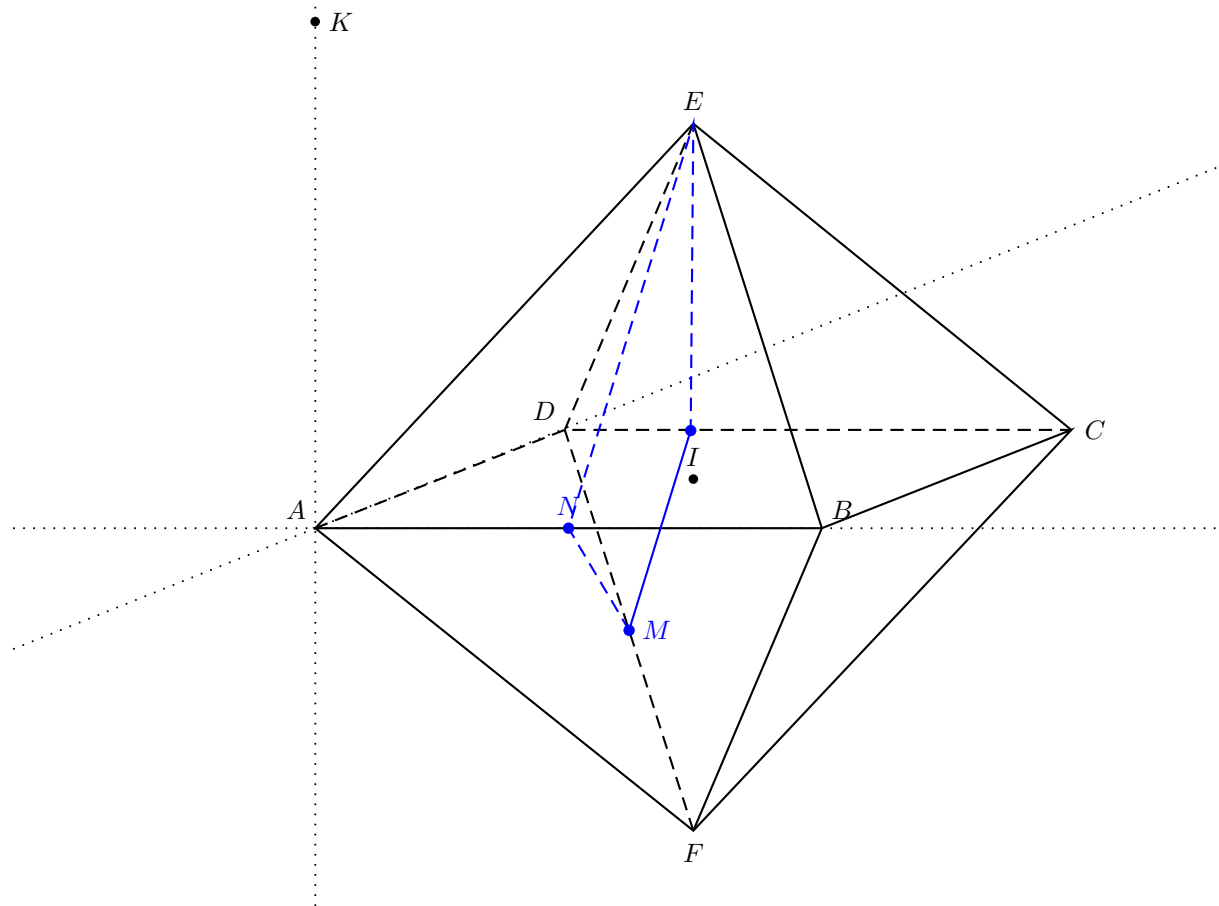
$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 \times 1 - 2 \times 0 + \sqrt{2} \times 0 = 0 \text{ et } \vec{n} \cdot \overrightarrow{DF} = 0 \times \frac{1}{2} - 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \sqrt{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0.$$

Le vecteur \vec{n} est orthogonal aux vecteurs \overrightarrow{DC} et \overrightarrow{DF} qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan (FDC) . On en déduit que le vecteur \vec{n} est un vecteur normal au plan (FDC) .

Puisque le vecteur \vec{n} est aussi un vecteur normal au plan (ABE) , on a montré que les plans (FDC) et (ABE) sont parallèles.

b) Puisque le point N n'est pas dans le plan (FDC) et que le point M est dans le plan (FDC) , les plans (EMN) et (FDC) sont sécants en une droite (Δ) passant par M .

Puisque les plans (ABE) et (FDC) sont parallèles, le plan (EMN) coupe les plans (ABE) et (FDC) suivant deux droites parallèles. La droite (Δ) est donc la parallèle à la droite (EN) passant par M .



c) Construction. On note P le point d'intersection de la droite (Δ) de la question précédente et de la droite (DC) . Pour obtenir la section du plan (ABF) par le plan (EMN) , on a tracé la parallèle à la droite (PE) passant par N .

