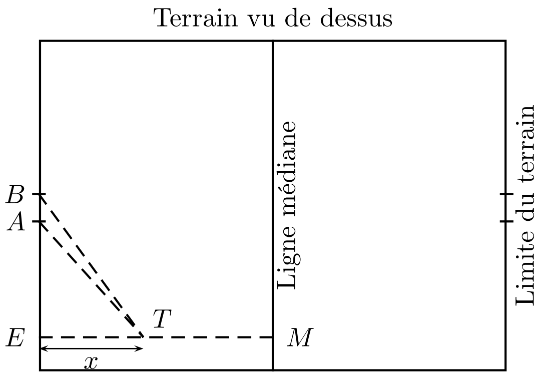
France métropolitaine 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (commun à tous les candidats)

Lors d'un match de rugby, un joueur doit transformer un essai qui a été marqué au point E (voir figure ci-contre) situé à l'extérieur du segment $[AB]$.
La transformation consiste à taper le ballon par un coup de pied depuis un point T que le joueur a le droit de choisir n'importe où sur le segment $[EM]$ perpendiculaire à la droite (AB) sauf en E. La transformation est réussie si le ballon passe entre les poteaux repérés par les points A et B sur la figure.



Pour maximiser ses chances de réussite, le joueur tente de déterminer la position du point T qui rend l'angle $\widehat{ATB}$ le plus grand possible.

Le but de cet exercice est donc de rechercher s'il existe une position du point T sur le segment $[EM]$ pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et, si c'est le cas, de déterminer une valeur approchée de cet angle.
Dans toute la suite, on note x la longueur ET, qu'on cherche à déterminer.

Les dimensions du terrain sont les suivantes : EM $=$ 50 m, EA $=$ 25 m et AB $=$ 5,6 m . On note α la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETA}$, β la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETB}$ et γ la mesure en radian de l'angle $\widehat{ATB}$.

1) En utilisant les triangles rectangles ETA et ETB ainsi que les longueurs fournies, exprimer $\tan\alpha$ et $\tan\beta$ en fonction de x.

La fonction tangente est définie sur l'intervalle $\left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$ par $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

2) Montrer que la fonction tan est strictement croissante sur l'intervalle $\left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$.

3) L'angle $\widehat{ATB}$ admet une mesure γ appartenant à l'intervalle $\left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$, résultat admis ici, que l'on peut observer sur la figure.

On admet que, pour tous réels a et b de l'intervalle $\left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$,

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b}.$$

Montrer que $\tan\gamma = \dfrac{5,6x}{x^2 + 765}$.

4) L'angle $\widehat{ATB}$ est maximum lorsque sa mesure γ est maximale. Montrer que cela correspond à un minimum sur l'intervalle $]0\ ;\ 50]$ de la fonction f définie par : $f(x) = x + \dfrac{765}{x}$.

Montrer qu'il existe une unique valeur de x pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et déterminer cette valeur de x au mètre près ainsi qu'une mesure de l'angle $\widehat{ATB}$ à $0,01$ radian près.

France métropolitaine 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

1) Dans le triangle TEA rectangle en E, on a

$$\tan(\alpha) = \frac{EA}{ET} = \frac{25}{x}.$$

De même, dans le triangle TEB rectangle en E, on a

$$\tan(\beta) = \frac{EB}{ET} = \frac{30,6}{x}.$$

2) La fonction tan est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. De plus, pour x réel de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\tan'(x) = \frac{\cos x \times \cos x - \sin x \times (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

La dérivée de la fonction tangente est strictement positive sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et donc la fonction tangente est strictement croissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

3)

$$\tan(\gamma) = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan(\beta) - \tan(\alpha)}{1 + \tan(\beta)\tan(\alpha)} = \frac{\frac{30,6}{x} - \frac{25}{x}}{1 + \frac{25}{x} \times \frac{30,6}{x}} = \frac{\frac{5,6}{x}}{1 + \frac{765}{x^2}}$$

$$= \frac{5,6}{x} \times \frac{x^2}{x^2 + 765} = \frac{5,6x}{x^2 + 765}$$

4) Pour $x \in]0, 50]$, $f(x) = \frac{x^2 + 765}{x}$ puis $\frac{1}{f(x)} = \frac{x}{x^2 + 765}$ et enfin

$$\tan(\gamma) = 5,6 \times \frac{x}{x^2 + 765} = 5,6 \times \frac{1}{f(x)} = \frac{5,6}{f(x)}.$$

Puisque la fonction $t \mapsto \frac{5,6}{t}$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ (et que pour tout x de $]0, 50]$, $f(x) > 0$), $\tan(\gamma)$ est maximum si et seulement si $f(x)$ est minimum.

La fonction f est dérivable sur $]0, 50]$ et pour tout réel x de $]0, 50]$,

$$f'(x) = 1 + 765 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{765}{x^2} = \frac{x^2 - 765}{x^2} = \frac{\left(x - \sqrt{765}\right)\left(x + \sqrt{765}\right)}{x^2}.$$

Sur $]0, 50]$, on a $x^2 > 0$ et $x + \sqrt{765} > 0$. Sur $]0, 50]$, $f'(x)$ est du signe de $x - \sqrt{765}$ avec $\sqrt{765} = 27,6\ldots$ et donc $\sqrt{765} \in]0, 50]$. Par suite, la fonction f est strictement décroissante sur $\left]0, \sqrt{765}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\sqrt{765}, 50\right]$. La fonction f admet un minimum en $x_0 = \sqrt{765}$.

L'angle $\widehat{ATB}$ est donc maximum pour $ET = \sqrt{765}$ et donc pour maximiser ses chances, le joueur doit se placer à 28 mètres, arrondi au mètre, de la ligne d'essai. Dans ce cas, $\tan(\gamma) = \frac{5,6\sqrt{765}}{1530}$ et donc l'angle maximum mesure 0,1 radian arrondi à 0,01 radian (fourni par la calculatrice) soit environ 6°.

