

France métropolitaine 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Partie A

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = x - \ln(x^2 + 1).$$

1) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $f(x) = x$.

2) Justifier tous les éléments du tableau de variations ci-dessous à l'exception de la limite de la fonction f en $+\infty$ que l'on admet.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$			

3) Montrer que, pour tout réel x appartenant à $[0 ; 1]$, $f(x)$ appartient à $[0 ; 1]$.

4) On considère l'algorithme suivant :

Variables	N et A des entiers naturels
Entrée	Saisir la valeur de A
Traitement	N prend la valeur 0 Tant que $N - \ln(N^2 + 1) < A$ N prend la valeur $N + 1$ Fin tant que
Sortie	Afficher N

a) Que fait cet algorithme ?

b) Déterminer la valeur N fournie par l'algorithme lorsque la valeur saisie pour A est 100.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n^2 + 1)$.

1) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , u_n appartient à $[0 ; 1]$.

2) Étudier les variations de la suite (u_n) .

3) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

4) On note ℓ sa limite, et on admet que ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$.
En déduire la valeur de ℓ .