

France métropolitaine 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Partie A

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = x - \ln(x^2 + 1).$$

- 1) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $f(x) = x$.
- 2) Justifier tous les éléments du tableau de variations ci-dessous à l'exception de la limite de la fonction f en $+\infty$ que l'on admet.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$			

- 3) Montrer que, pour tout réel x appartenant à $[0 ; 1]$, $f(x)$ appartient à $[0 ; 1]$.
- 4) On considère l'algorithme suivant :

Variables	N et A des entiers naturels
Entrée	Saisir la valeur de A
Traitement	N prend la valeur 0 Tant que $N - \ln(N^2 + 1) < A$ N prend la valeur $N + 1$ Fin tant que
Sortie	Afficher N

- a) Que fait cet algorithme ?
- b) Déterminer la valeur N fournie par l'algorithme lorsque la valeur saisie pour A est 100.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n^2 + 1)$.

- 1) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , u_n appartient à $[0 ; 1]$.
- 2) Étudier les variations de la suite (u_n) .
- 3) Montrer que la suite (u_n) est convergente.
- 4) On note ℓ sa limite, et on admet que ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$.
En déduire la valeur de ℓ .

France métropolitaine 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

Partie A

1) Soit x un réel.

$$f(x) = x \Leftrightarrow x - \ln(x^2 + 1) = x \Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

L'équation $f(x) = x$ admet sur \mathbb{R} une solution et une seule à savoir 0.

2) **Dérivée et variations.** Pour tout réel x , $x^2 + 1 > 0$ et donc la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} . De plus, pour x réel,

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1} = \frac{(x - 1)^2}{x^2 + 1}.$$

La fonction f' est strictement positive sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ (et s'annule en 1). Donc

la fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

Limite en $-\infty$. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 + 1) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$ et donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\ln(x^2 + 1) = -\infty$. D'autre part, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ et en additionnant, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

3) Soit x un réel de $[0, 1]$. Puisque la fonction f est croissante sur $[0, 1]$, si $0 \leq x \leq 1$, alors $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$ avec $f(0) = 0$ (d'après la question 1)) et $f(1) = 1 - \ln 2 = 0,3 \dots$. En particulier, si $x \in [0, 1]$, alors $f(x) \in [0, 1]$.

4) a) A étant un réel donné, l'algorithme affiche la plus petite valeur de l'entier N pour laquelle on a $f(N) \geq A$.

b) D'après le tableau de variations de f , la suite $(N - \ln(N^2 + 1))_{N \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

La calculatrice fournit $f(109) = 99,6 \dots$ et $f(110) = 100,5 \dots$. L'algorithme affiche donc 110.

Partie B

1) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n \in [0, 1]$.

• $u_0 = 1$ et donc la propriété est vraie quand $n = 0$.

• Soit $n \geq 0$. Supposons que $u_n \in [0, 1]$. Alors, $f(u_n) \in [0, 1]$ d'après la question 3 de la partie A ou encore $u_{n+1} \in [0, 1]$.

On a montré par récurrence que

pour tout entier naturel n , $u_n \in [0, 1]$.

2) Soit n un entier naturel. $u_{n+1} - u_n = -\ln(u_n^2 + 1)$. Or, $u_n^2 + 1 > 1$ puis $\ln(u_n^2 + 1) > 0$ et donc $u_{n+1} - u_n < 0$.

On a montré que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} < u_n$ et donc

la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

3) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0. Donc, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un certain réel ℓ positif ou nul.

4) D'après la question 1) de la partie A, l'équation $f(x) = x$ admet une solution et une seule à savoir 0. Donc,

$$\ell = 0.$$