

France métropolitaine 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (4 points) (commun à tous les candidats)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points :

$$A(1 ; 2 ; 3), B(3 ; 0 ; 1), C(-1 ; 0 ; 1), D(2 ; 1 ; -1), E(-1 ; -2 ; 3) \text{ et } F(-2 ; -3 ; 4).$$

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1 : Les trois points A , B , et C sont alignés.

Affirmation 2 : Le vecteur $\vec{n}(0 ; 1 ; -1)$ est un vecteur normal au plan (ABC) .

Affirmation 3 : La droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants et leur point d'intersection est le milieu du segment $[BC]$.

Affirmation 4 : Les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

France métropolitaine 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

Justification 1. Le vecteur \overrightarrow{AB} a pour coordonnées $(2, -2, -2)$ et le vecteur \overrightarrow{AC} a pour coordonnées $(-2, -2, -2)$. S'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ alors $-2 = 2k$ et aussi $-2 = -2k$ ce qui est impossible. Donc, il n'existe pas de réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$. On en déduit que les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas colinéaires ou encore que les points A , B et C ne sont pas alignés.

L'affirmation 1 est fausse.

Justification 2. Les points A , B et C définissent donc un unique plan et les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \times 2 + 1 \times (-2) + (-1) \times (-2) = -2 + 2 = 0$$

et

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \times (-2) + 1 \times (-2) + (-1) \times (-2) = -2 + 2 = 0.$$

Le vecteur \vec{n} est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) et donc le vecteur \vec{n} est un vecteur normal au plan (ABC) .

L'affirmation 2 est vraie.

Justification 3. La droite (EF) est la droite passant par $E(-1, -2, 3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{EF}(-1, -1, 1)$. Un système d'équations paramétriques de la droite (EF) est

$$\begin{cases} x = -1 - t \\ y = -2 - t \\ z = 3 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

D'autre part, le plan (ABC) est le plan passant par $A(1, 2, 3)$ et de vecteur normal $\vec{n}(0, 1, -1)$. Une équation du plan (ABC) est $0 \times (x - 1) + 1 \times (y - 2) - 1 \times (z - 3) = 0$ ou encore $y - z + 1 = 0$.

Soit $M(-1 - t, -2 - t, 3 + t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite (EF) .

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow (-2 - t) - (3 + t) + 1 = 0 \Leftrightarrow -2t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = -2.$$

Pour $t = -2$, on obtient le point de coordonnées $(1, 0, 1)$. Ainsi, la droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants en le point de coordonnées $(1, 0, 1)$. D'autre part, le milieu du segment $[BC]$ a pour coordonnées $\left(\frac{3-1}{2}, \frac{0+0}{2}, \frac{1+1}{2}\right)$ ou encore $(1, 0, 1)$. La droite (EF) et le plan (ABC) sont effectivement sécants en le milieu du segment $[BC]$.

L'affirmation 3 est vraie.

Justification 4.

1ère solution. Si les droites (AB) et (CD) sont sécantes, elles sont en particulier coplanaires et on en déduit que le point B appartient au plan (ABC) . Mais $y_D - z_D + 1 = 1 - (-1) + 1 = 3 \neq 0$. Donc, le point D n'appartient pas au plan (ABC) et finalement les droites (AB) et (CD) ne sont pas sécantes.

2ème solution. La droite (AB) est la droite passant par $A(1, 2, 3)$ et de vecteur directeur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}(1, -1, -1)$. Un système d'équations paramétriques de la droite (AB) est

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

La droite (CD) est la droite passant par $C(-1, 0, 1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{CD}(3, 1, -2)$. Un système d'équations paramétriques de la droite (CD) est

$$\begin{cases} x = -1 + 3u \\ y = u \\ z = 1 - 2u \end{cases}, u \in \mathbb{R}.$$

Soient $M(1 + t, 2 - t, 3 - t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite (AB) et $N(-1 + 3u, u, 1 - 2u)$, $u \in \mathbb{R}$, un point de la droite (CD) .

$$M = N \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + t = -1 + 3u \\ 2 - t = u \\ 3 - t = 1 - 2u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 - t \\ 1 + t = -1 + 3(2 - t) \\ 3 - t = 1 - 2(2 - t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 - t \\ 4t = 4 \\ -3t = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 - t \\ t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution et donc les droites (AB) et (CD) ne sont pas sécantes.

L'affirmation 4 est fausse.