France métropolitaine 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (6 points) (commun à tous les candidats)

Partie A

Une usine fabrique un composant électronique. Deux chaînes de fabrication sont utilisées.
La chaîne A produit 40 % des composants et la chaîne B produit le reste.

Une partie des composants fabriqués présentent un défaut qui les empêche de fonctionner à la vitesse prévue par le constructeur. En sortie de chaîne A, 20 % des composants présentent ce défaut alors qu'en sortie de chaîne B, ils ne sont que 5 %.

On choisit au hasard un composant fabriqué dans cette usine. On note :

A l'évènement « le composant provient de la chaîne A »
B l'évènement « le composant provient de la chaîne B »
S l'évènement « le composant est sans défaut »

1) Montrer que la probabilité de l'évènement S est $P(S) = 0,89$.

2) Sachant que le composant ne présente pas de défaut, déterminer la probabilité qu'il provienne de la chaîne A. On donnera le résultat à 10^{-2} près.

Partie B

Des améliorations apportées à la chaîne A ont eu pour effet d'augmenter la proportion p de composants sans défaut.

Afin d'estimer cette proportion, on prélève au hasard un échantillon de 400 composants parmi ceux fabriqués par la chaîne A.
Dans cet échantillon, la fréquence observée de composants sans défaut est de $0,92$.

1) Déterminer un intervalle de confiance de la proportion p au niveau de confiance de 95 %.

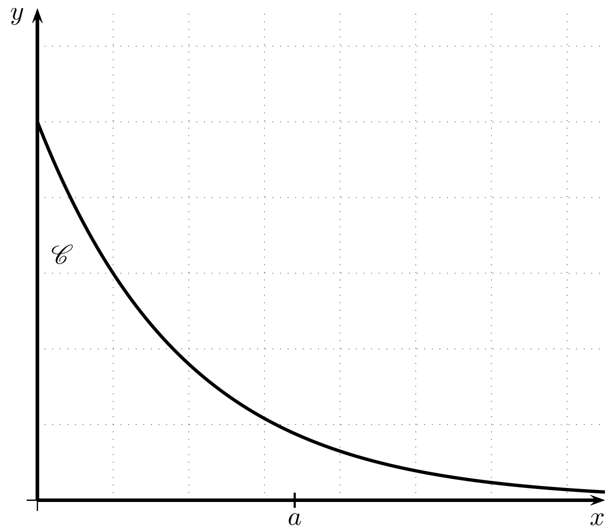
2) Quelle devrait être la taille minimum de l'échantillon pour qu'un tel intervalle de confiance ait une amplitude maximum de $0,02$?

Partie C

La durée de vie, en années, d'un composant électronique fabriqué dans cette usine est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre λ (où λ est un nombre réel strictement positif).
On note f la fonction densité associée à la variable aléatoire T. On rappelle que :

- pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.
- pour tout nombre réel $a \geqslant 0$, $p(T \leqslant a) = \displaystyle\int_0^a f(x)\,dx$.

1) La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f est donnée ci-dessous.



a) Interpréter graphiquement $P(T \leqslant a)$ où $a > 0$.

b) Montrer que pour tout nombre réel $t \geqslant 0$: $P(T \leqslant t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

c) En déduire que $\lim\limits_{t \to +\infty} P(T \leqslant t) = 1$.

2) On suppose que $P(T \leqslant 7) = 0,5$. Déterminer λ à 10^{-3} près.

3) Dans cette question, on prend $\lambda = 0,099$ et on arrondit les résultats des probabilités au centième.

a) On choisit au hasard un composant fabriqué dans cette usine.
Déterminer la probabilité que ce composant fonctionne au moins 5 ans.

b) On choisit au hasard un composant parmi ceux qui fonctionnent encore au bout de 2 ans.
Déterminer la probabilité que ce composant ait une durée de vie supérieure à 7 ans.

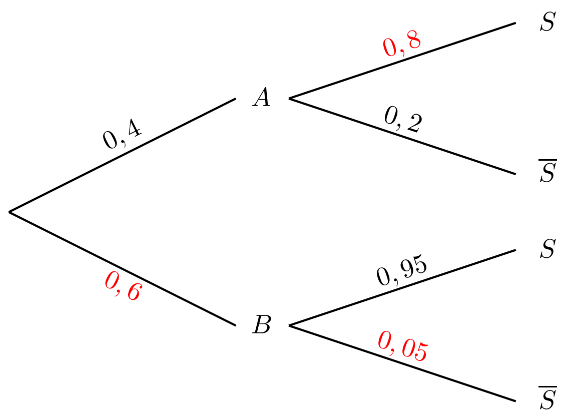
c) Donner l'espérance mathématique $E(T)$ de la variable aléatoire T à l'unité près.
Interpréter ce résultat.

France métropolitaine 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

Partie A

1) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(S) &= P(A) \times P_A(S) + P(B) \times P_B(S) \\ &= 0,4 \times 0,8 + 0,6 \times 0,95 = 0,32 + 0,57 = 0,89. \end{aligned}$$

$$\boxed{P(S) = 0,89.}$$

2) La probabilité demandée est $P_S(A)$.

$$P_S(A) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = \frac{0,4 \times 0,8}{0,89} = \frac{32}{89} = 0,36 \text{ arrondi à } 10^{-2}.$$

$$\boxed{P_S(A) = 0, \text{ arrondi à } 10^{-2}.}$$

Partie B

1) Ici $n = 400$ et $f = 0,92$. On note que $nf = 368$ et $n(1-f) = 32$ de sorte que $n \geqslant 30$, $nf \geqslant 5$ et $n(1-f) \geqslant 5$. Un intervalle de confiance au niveau de confiance 95% est

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,92 - \frac{1}{\sqrt{400}}, 0,92 + \frac{1}{\sqrt{400}}\right] = [0,87; 0,97].$$

La proportion p appartient à l'intervalle $[0,87; 0,97]$ au niveau de confiance 95%.

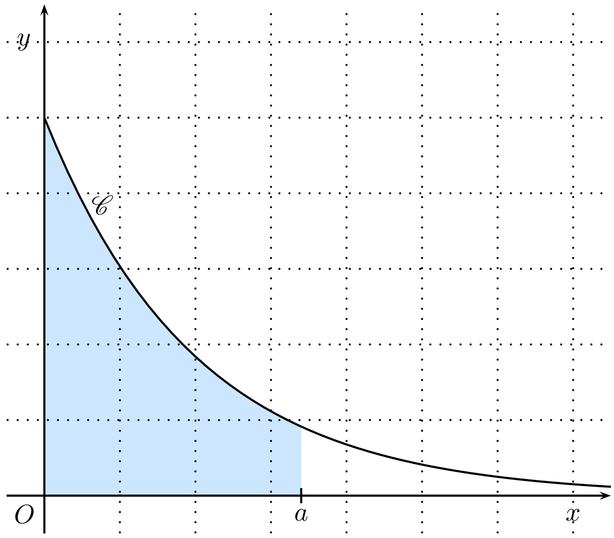
2) Soit n la taille de l'échantillon. Un intervalle de confiance au niveau de confiance 95% est $\left[0,92 - \frac{1}{\sqrt{n}}, 0,92 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.
L'amplitude de cet intervalle est $\frac{2}{\sqrt{n}}$.

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0,02 &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 0,01 \Leftrightarrow \sqrt{n} \geqslant 100 \\ &\Leftrightarrow n \geqslant 10\,000 \text{ (par stricte croissance de la fonction } x \mapsto x^2 \text{ sur } [0, +\infty[). \end{aligned}$$

La taille minimum de l'échantillon pour que l'amplitude de l'intervalle de confiance soit au maximum $0,02$ est 10 000.

Partie C

1) a) Interprétation graphique. $P(T \leqslant a)$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine coloré en bleu ci-dessous.



b) Soit $t \geqslant 0$.

$$P(T \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = \left(-e^{-\lambda t}\right) - \left(-e^0\right) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

c) Puisque $\lambda > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-\lambda t} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$ et donc $\lim\limits_{t \to +\infty} P(T \leqslant t) = 1 - 0 = 1$.

2)

$$\begin{aligned} P(T \leqslant 7) = 0,5 &\Leftrightarrow 1 - e^{-7\lambda} = 0,5 \Leftrightarrow e^{-7\lambda} = 0,5 \\ &\Leftrightarrow -7\lambda = \ln(0,5) \Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln(0,5)}{7} \\ &\Leftrightarrow \lambda = 0,0990... \end{aligned}$$

Donc, $\lambda = 0,099$ arrondi à 10^{-3}.

3) Pour tout réel positif t, $P(T \leqslant t) = 1 - e^{-0,099t}$ et donc aussi $P(T \geqslant t) = e^{-0,099t}$.

a) La probabilité demandée est $P(T \geqslant 5)$.

$$P(T \geqslant 5) = e^{-0,099 \times 5} = e^{-0,495} = 0,61 \text{ arrondi à } 10^{-2}.$$

b) La probabilité demandée est $P_{T \geqslant 2}(T \geqslant 7)$. On sait que la loi exponentielle de paramètre λ est une loi sans vieillissement. Donc,

$$P_{T \geqslant 2}(T \geqslant 7) = P_{T \geqslant 2}(T \geqslant 5 + 2) = P(T \geqslant 5) = 0,61 \text{ arrondi à } 10^{-2}.$$

c) On sait que l'espérance de la loi exponentielle de paramètre λ est $\dfrac{1}{\lambda}$. Donc, ici, $E(T) = \dfrac{1}{0,099} = 10$ arrondi à l'unité. Ceci signifie qu'en moyenne, un composant vit 10 ans.

