

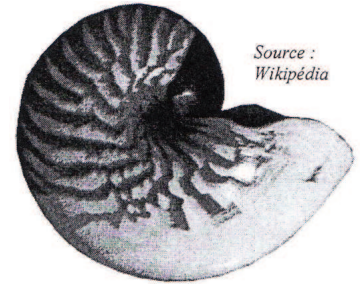
Centres étrangers 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

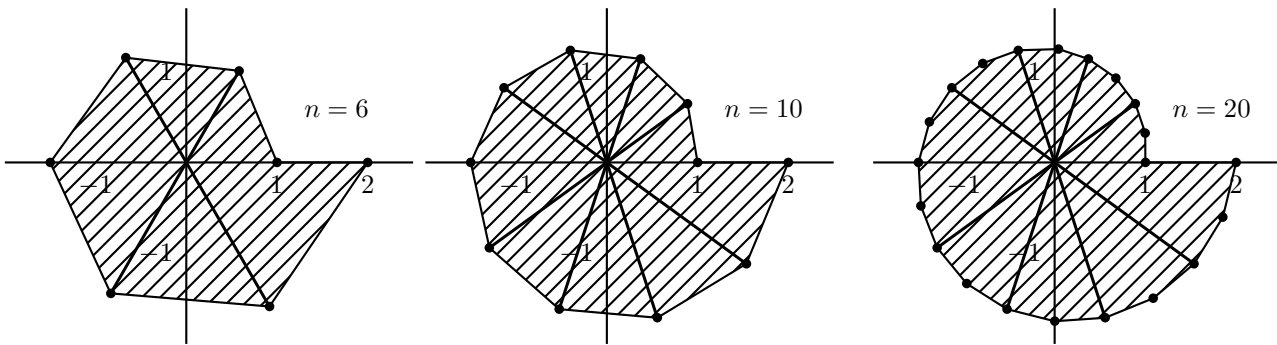
On veut modéliser dans le plan la coquille d'un nautilus à l'aide d'une ligne brisée en forme de spirale. On s'intéresse à l'aire délimitée par cette ligne.

On munit le plan d'un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Pour tout entier k allant de 0 à n , on définit les nombres complexes

$$z_k = \left(1 + \frac{k}{n}\right) e^{i\frac{2k\pi}{n}} \text{ et on note } M_k \text{ le point d'affixe } z_k.$$



Dans ce modèle, le pourtour du nautilus est la ligne brisée reliant tous les points M_k avec $0 \leq k \leq n$. Par exemple, pour les entiers $n = 6$, $n = 10$ et $n = 20$, on obtient les figures ci-dessous.



Partie A - Ligne brisée formée à partir de sept points

Dans cette partie, on suppose que $n = 6$. Ainsi, pour $0 \leq k \leq 6$, on a $z_k = \left(1 + \frac{k}{6}\right) e^{i\frac{2k\pi}{6}}$.

- 1) Déterminer la forme algébrique de z_1 .
- 2) Vérifier que z_0 et z_6 sont des entiers que l'on déterminera.
- 3) Calculer la longueur de la hauteur issue de M_1 dans le triangle OM_0M_1 puis établir que l'aire de ce triangle est égale à $\frac{7\sqrt{3}}{24}$.

Partie B - Ligne brisée formée à partir de $n + 1$ points

Dans cette partie, n est un entier supérieur ou égal à 2.

- 1) Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, déterminer la longueur OM_k .
- 2) Pour k entier tel que $0 \leq k \leq n - 1$, déterminer une mesure des angles $(\vec{u} ; \overrightarrow{OM_k})$ et $(\vec{u} ; \overrightarrow{OM_{k+1}})$.
En déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OM_k} ; \overrightarrow{OM_{k+1}})$.
- 3) Pour k entier tel que $0 \leq k \leq n - 1$, démontrer que la longueur de la hauteur issue de M_{k+1} dans le triangle OM_kM_{k+1} est égale à $\left(1 + \frac{k+1}{n}\right) \times \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.
- 4) On admet que l'aire du triangle OM_kM_{k+1} est égale à $a_k = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \times \left(1 + \frac{k}{n}\right) \left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$ et que l'aire totale délimitée par la ligne brisée est égale à $A_n = a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1}$.
L'algorithme suivant permet de calculer l'aire A_n lorsqu'on entre l'entier n :

VARIABLES :	A est un nombre réel k est un entier n est un entier
TRAITEMENT :	Lire la valeur de n A prend la valeur 0 Pour k allant de 0 à $n-1$ A prend la valeur $A + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \times \left(1 + \frac{k}{n}\right) \left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$ Fin Pour
SORTIE :	Afficher A

On entre dans l'algorithme $n = 10$

Recopier et compléter le tableau ci-dessous qui illustre le fonctionnement de l'algorithme.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0,323	0,711	1,170	10705	2,322	3,027	3,826	4,726		

- 5) On admet que $A_2 = 0$ et que la suite (A_n) converge et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \frac{7\pi}{3} \approx 7,3$.
Recopier et compléter les lignes L6 et L13 de l'algorithme ci-après qui permet de déterminer le plus petit entier n tel que $A_n \geq 7,2$. On ne demande pas de déterminer n .

L1	VARIABLES :	A est un nombre réel
L2		k est un entier
L3		n est un entier
L4	TRAITEMENT :	n prend la valeur 2
L5		A prend la valeur 0
L6		Tant que
L7		n prend la valeur $n + 1$
L8		A prend la valeur 0
L9		Pour k allant de 0 à $n - 1$
L10		A prend la valeur $A + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \times \left(1 + \frac{k}{n}\right) \left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$
		Fin Pour
L12		Fin Tant que
L13	SORTIE :	Afficher ...

Centres étrangers 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

Partie A

$$1) z_1 = \left(1 + \frac{1}{6}\right) e^{\frac{2i\pi}{6}} = \frac{7}{6} e^{\frac{i\pi}{3}} = \frac{7}{6} \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{7}{12} + i\frac{7\sqrt{3}}{12}.$$

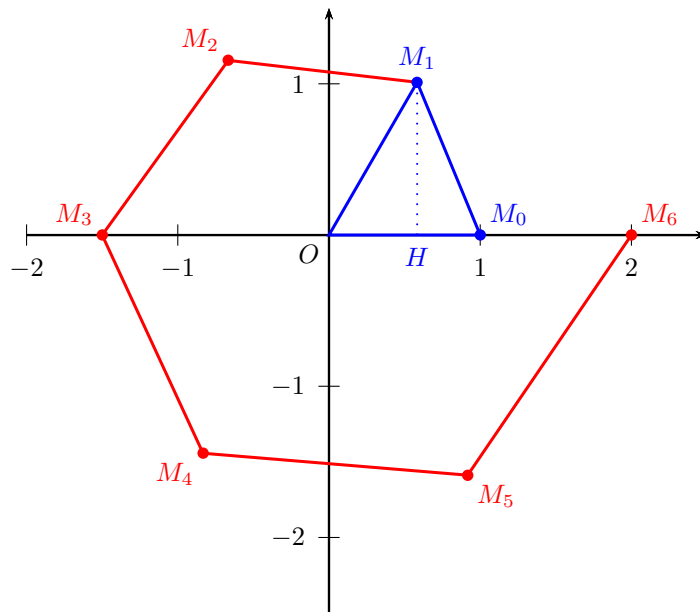
$$2) z_0 = \left(1 + \frac{0}{6}\right) e^0 = 1 \text{ et } z_6 = \left(1 + \frac{6}{6}\right) e^{2i\pi} = 2(\cos(2\pi) + i\sin(2\pi)) = 2. \text{ En particulier, } z_0 \text{ et } z_6 \text{ sont des entiers.}$$

3) Notons H le pied de la hauteur issue de M_1 dans le triangle OM_0M_1 . On a $z_H = x_{M_1} = \operatorname{Re}(z_1) = \frac{7}{12}$ et donc

$$HM_1 = |z_1 - z_H| = \left| \frac{7}{12} + i\frac{7\sqrt{3}}{12} - \frac{7}{12} \right| = \left| i\frac{7\sqrt{3}}{12} \right| = \frac{7\sqrt{3}}{12} |i| = \frac{7\sqrt{3}}{12}.$$

L'aire du triangle OM_0M_1 est alors

$$\frac{OM_0 \times HM_1}{2} = \frac{1 \times \frac{7\sqrt{3}}{12}}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{24}.$$



Partie B

1) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit k un entier tel que $0 \leq k \leq n$. Puisque $1 + \frac{k}{n} > 0$,

$$OM_k = |z_k| = \left| \left(1 + \frac{k}{n}\right) e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right| = \left(1 + \frac{k}{n}\right) \left| e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right| = 1 + \frac{k}{n}.$$

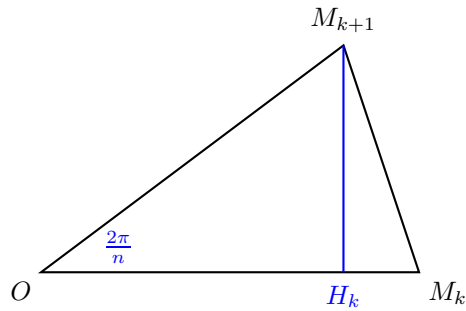
2) Soit k un entier tel que $0 \leq k \leq n - 1$.

$$\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM_k}\right) = \arg(z_k) = \arg\left(\left(1 + \frac{k}{n}\right) e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = \frac{2k\pi}{n} \quad [2\pi].$$

et donc aussi $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM_{k+1}}\right) = \frac{2(k+1)\pi}{n} \quad [2\pi]$. Par suite, d'après la relation de CHALES,

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{OM_k}, \overrightarrow{OM_{k+1}}\right) &= \left(\overrightarrow{OM_k}, \vec{u}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{OM_{k+1}}\right) = -\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM_k}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{OM_{k+1}}\right) \\ &= -\frac{2k\pi}{n} + \frac{2(k+1)\pi}{n} = \frac{2(k+1-k)\pi}{n} \\ &= \frac{2\pi}{n} \quad [2\pi]. \end{aligned}$$

3) Soit k un entier naturel tel que $0 \leq k \leq n - 1$. Notons H_k le pied de la hauteur issue de M_{k+1} dans le triangle OM_kM_{k+1} .



D'après la question précédente, on a $\widehat{M_k O M_{k+1}} = \frac{2\pi}{n}$ puis

$$\frac{H_k M_{k+1}}{OM_{k+1}} = \sin(\widehat{M_k O M_{k+1}}) = \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

et donc, d'après la question 1),

$$H_k M_{k+1} = OM_{k+1} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \left(1 + \frac{k+1}{n}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

4) Tableau complété.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0,323	0,711	1,170	1,705	2,322	3,027	3,826	4,726	5,731	6,847

5) Algorithme complété.

Variables :	A est un nombre réel k est un entier n est un entier
Traitement :	n prend la valeur 2 A prend la valeur 0 Tant que $A < 7,2$ n prend la valeur $n + 1$ A prend la valeur 0 Pour k allant de 0 à $n - 1$ A prend la valeur $A + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \times \left(1 + \frac{k}{n}\right) \left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$ Fin Pour Fin Tant que
Sortie :	Afficher n