Centres étrangers 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (5 points) (commun à tous les candidats)

Un institut effectue un sondage pour connaître, dans une population donnée, la proportion de personnes qui sont favorables à un projet d'aménagement du territoire. Pour cela, on interroge un échantillon aléatoire de personnes de cette population, et l'on pose une question à chaque personne.

Les trois parties sont relatives à cette même situation, mais peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A - Nombre de personnes qui acceptent de répondre au sondage

On admet dans cette partie que la probabilité qu'une personne interrogée accepte de répondre à la question est égale à 0,6.

1) L'institut de sondage interroge 700 personnes. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes interrogées qui acceptent de répondre à la question posée.

a) Quelle est la loi de la variable aléatoire X ? Justifier la réponse.

b) Quelle est la meilleure approximation de $P(X \geqslant 400)$ parmi les nombres suivants ?

$$0,92 \qquad 0,93 \qquad 0,94 \qquad 0,95.$$

2) Combien de personnes l'institut doit-il interroger au minimum pour garantir, avec une probabilité supérieure à 0,9, que le nombre de personnes répondant au sondage soit supérieur ou égal à 400.

Partie B - Proportion de personnes favorables au projet dans la population

Dans cette partie, on suppose que n personnes ont répondu à la question et on admet que ces personnes constituent un échantillon aléatoire de taille n (où n est un entier naturel supérieur à 50).
Parmi ces personnes, 29 % sont favorables au projet d'aménagement.

1) Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la proportion de personnes qui sont favorables au projet dans la population totale.

2) Déterminer la valeur minimale de l'entier n pour que l'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, ait une amplitude inférieure ou égale à 0,04.

Partie C - Correction due à l'insincérité de certaines réponses

Dans cette partie, on suppose que, parmi les personnes sondées qui ont accepté de répondre à la question posée, 29 % affirment qu'elles sont favorables au projet.
L'institut de sondage sait par ailleurs que la question posée pouvant être gênante pour les personnes interrogées, certaines d'entre elles ne sont pas sincères et répondent le contraire de leur opinion véritable. Ainsi, une personne qui se dit favorable peut :

- soit être en réalité favorable au projet si elle est sincère.
- soit être en réalité défavorable au projet si elle n'est pas sincère.

Par expérience, l'institut estime à 15 % le taux de réponses non sincères parmi les personnes ayant répondu, et admet que ce taux est le même quelle que soit l'opinion de la personne interrogée.
Le but de cette partie est, à partir de ces données, de déterminer le taux réel de personnes favorables au projet, à l'aide d'un modèle probabiliste. On prélève au hasard la fiche d'une personne ayant répondu, et on définit :

- F l'évènement « la personne est en réalité favorable au projet » ;
- $\overline{F}$ l'évènement « la personne est en réalité défavorable au projet » ;
- A l'évènement « la personne affirme qu'elle est favorable au projet » ;
- $\overline{A}$ l'évènement « la personne affirme qu'elle est défavorable au projet ».

Ainsi, d'après les données, on a $p(A) = 0,29$.

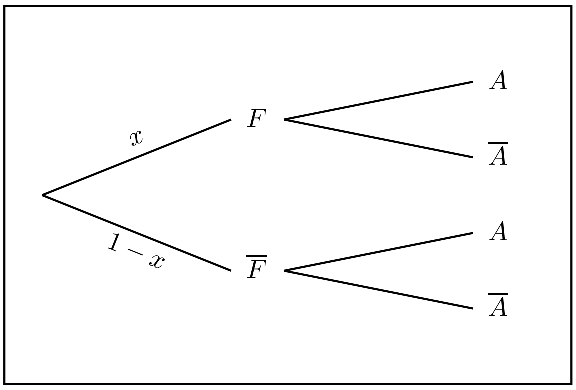
1) En interprétant les données de l'énoncé, indiquer les valeurs de $P_F(A)$ et $P_{\overline{F}}(A)$.

2) On pose $x = P(F)$.

a) Reproduire sur la copie et compléter l'arbre de probabilité ci-contre.

b) En déduire une égalité vérifiée par le réel x.

3) Déterminer, parmi les personnes ayant répondu au sondage, la proportion de celles qui sont réellement favorables au projet.



Centres étrangers 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

Partie A. Nombre de personnes qui acceptent de répondre au sondage

1) a) • 700 expériences identiques et indépendantes sont effectuées.
• Chaque expérience a deux issues à savoir « la personne accepte de répondre au sondage » avec une probabilité $p = 0,6$ et « la personne n'accepte pas de répondre au sondage » avec une probabilité $1 - p = 0,4$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 700$ et $p = 0,6$.

b) La calculatrice fournit $P(X \geqslant 400) = 0,942\ldots$ La meilleure valeur approchée de $P(X \geqslant 400)$ est $0,94$.

2) Notons n le nombre de personnes interrogées, n étant un entier supérieur ou égal à 400. Notons X_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètre n et $p = 0,6$. La probabilité que le nombre de personnes acceptant de répondre au sondage soit supérieur ou égal à 400 est $P(X_n \geqslant 400)$. La suite $(P(X_n \geqslant 400))_{n \geqslant 400}$ est bien sûr croissante.

La calculatrice fournit le tableau de valeurs suivant

n	$P(X_n \geqslant 400)$
700	$0,94\ldots$
699	$0,93\ldots$
698	$0,93\ldots$
697	$0,92\ldots$
696	$0,91\ldots$
695	$0,91\ldots$
694	$0,90\ldots$
693	$0,89\ldots$

La valeur minimum de l'entier n cherchée est 694.

Partie B

1) La fréquence observée est $f = 0,29$. On note $n \geqslant 50$ et en particulier $n \geqslant 30$ puis $nf \geqslant 0,29 \times 50$ ou encore $nf \geqslant 14,5$ et en particulier $nf \geqslant 5$ puis $n(1-f) \geqslant 0,71 \times 50$ et en particulier $n(1-f) \geqslant 5$.

Un intervalle de confiance au niveau de confiance 95% est

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,29 - \frac{1}{\sqrt{n}}, 0,29 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right].$$

2) L'amplitude de cet intervalle est $\left(0,29 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \left(0,29 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{2}{\sqrt{n}}$.

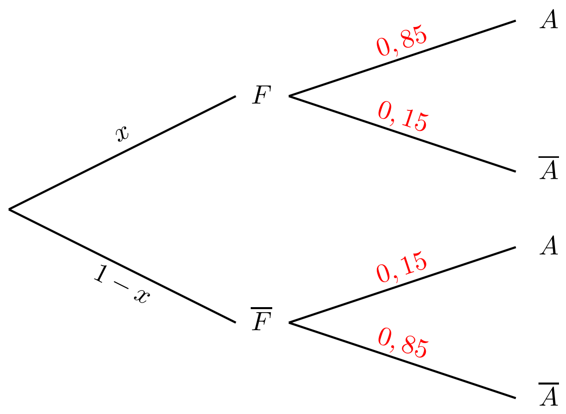
$$\frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0,04 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{n}}{2} \geqslant \frac{1}{0,04} \Leftrightarrow \sqrt{n} \geqslant 50 \Leftrightarrow n \geqslant 2500.$$

La valeur minimale cherchée est 2500.

Partie C

1) $P_F(A)$ est la probabilité que la personne affirme qu'elle est favaorable au projet sachant qu'elle est favorable au projet.
D'après l'énoncé, parmi les personnes favorables, il y en a 15% de non sincères qui vont donc affirmer qu'elles ne sont pas favorables au projet et 85% de sincères qui vont donc affirmer qu'elles sont favorables au projet. Donc, $P_F(A) = 0,85$ et de même, $P_{\overline{F}}(A) = 0,15$.

2) a) Arbre complété.



b)D'après la formule des probabilités totales,

$$P(F) \times P_F(A) + P\left(\overline{F}\right) \times P_{\overline{F}}(A) = P(A)$$

et donc

$$0,85x + 0,15(1-x) = 0,29.$$

3) $0,85x + 0,15(1-x) = 0,29 \Leftrightarrow 0,7x = 0,14 \Leftrightarrow x = \dfrac{0,14}{0,7} \Leftrightarrow x = 0,2.$
Donc, 20% des personnes ayant accepté de répondre au sondage sont réellement favorables au projet.

