Asie 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Un catadioptre est un dispositif optique formé de trois miroirs en forme de « coin de cube », les faces réfléchissantes tournées vers l'intérieur. On en trouve dans les réflecteurs de certains véhicules ainsi que dans les appareils de topographie.

Les points O, A, B et C sont des sommets d'un cube, de telle sorte que le repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{OA},\,\overrightarrow{OB},\,\overrightarrow{OC}\right)$ soit un repère orthonormé.

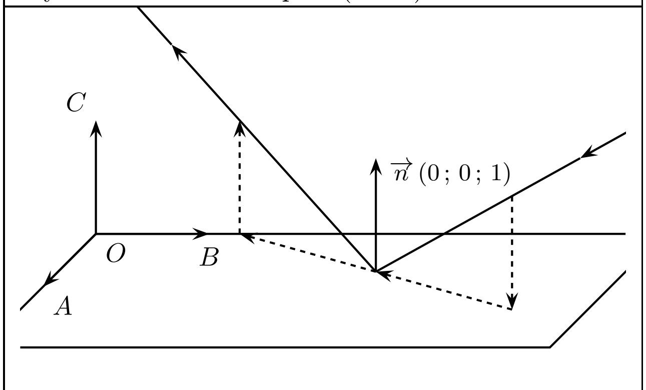
On utilisera ce repère dans tout l'exercice.

Les trois miroirs du catadioptre sont représentés par les plans (OAB), (OBC) et (OAC). Les rayons lumineux sont modélisés par des droites.

Règles de réflexion d'un rayon lumineux (admises) :

- lorsqu'un rayon lumineux de vecteur directeur $\overrightarrow{v}\,(a\ ;\ b\ ;\ c)$ est réfléchi par le plan (OAB), un vecteur directeur du rayon réfléchi est $\overrightarrow{v}\,(a\ ;\ b\ ;\ -c)$;
- lorsqu'un rayon lumineux de vecteur directeur $\overrightarrow{v}\,(a\ ;\ b\ ;\ c)$ est réfléchi par le plan (OBC), un vecteur directeur du rayon réfléchi est $\overrightarrow{v}\,(-a\ ;\ b\ ;\ c)$;
- lorsqu'un rayon lumineux de vecteur directeur $\overrightarrow{v}\,(a\ ;\ b\ ;\ c)$ est réfléchi par le plan (OAC), un vecteur directeur du rayon réfléchi est $\overrightarrow{v}\,(a\ ;\ -b\ ;\ c)$;

Vue en perspective cavalière de la réflexion d'un rayon lumineux sur le plan (OAB)



1) *Propriété des catadioptres*

En utilisant les règles précédentes, démontrer que si un rayon lumineux de vecteur directeur $\overrightarrow{v}\,(a\ ;\ b\ ;\ c)$ est réfléchi successivement par les plans (OAB), (OBC) et (OAC), le rayon final est parallèle au rayon initial.

Pour la suite, on considère un rayon lumineux modélisé par une droite d_1 de vecteur directeur $\overrightarrow{v_1}\,(-2\ ;\ -1\ ;\ -1)$ qui vient frapper le plan (OAB) au point $I_1\,(2\ ;\ 3\ ;\ 0)$. Le rayon réfléchi est modélisé par la droite d_2 de vecteur directeur $\overrightarrow{v_2}\,(-2\ ;\ -1\ ;\ 1)$ et passant par le point I_1.

2) *Réflexion de d_2 sur le plan (OBC)*

a) Donner une représentation paramétrique de la droite d_2.

b) Donner, sans justification, un vecteur normal au plan (OBC) et une équation cartésienne de ce plan.

c) Soit I_2 le point de coordonnées $(0\ ;\ 2\ ;\ 1)$.
Vérifier que le plan (OBC) et la droite d_2 sont sécants en I_2.

On note d_3 la droite qui représente le rayon lumineux après réflexion sur le plan (OBC). d_3 est donc la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{v_3}\,(2\ ;\ -1\ ;\ 1)$ passant par le point $I_2\,(0\ ;\ 2\ ;\ 1)$.

3) *Rélexion de d_3 sur le plan (OAC)*

Calculer les coordonnées du point d'intersection I_3 de la droite d_3 avec le plan (OAC).

On note d_4 la droite qui représente le rayon lumineux après réflexion sur le plan (OAC). Elle est donc parallèle à la droite d_1.

4) *Étude du trajet de la lumière*

On donne le vecteur $\overrightarrow{u}\,(1\ ;\ -2\ ;\ 0)$, et on note $\mathscr{P}$ le plan défini par les droites d_1 et d_2.

a) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{u}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

b) Les droites d_1, d_2 et d_3 sont-elles situées dans un même plan ?

c) Les droites d_1, d_2 et d_4 sont-elles situées dans un même plan ?

Asie 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

1) *Propriétés des catadioptres.*

On considère un rayon lumineux modélisé par une droite d_1 de vecteur directeur $\overrightarrow{v_1}(a, b, c)$. Le rayon se réfléchit sur le plan (OAB) en une droite d_2 de vecteur directeur $\overrightarrow{v_2}(a, b, -c)$. Ce nouveau rayon se réfléchit sur le plan (OBC) en une droite d_3 de vecteur directeur $\overrightarrow{v_3}(-a, b, -c)$. Ce dernier rayon se réfléchit sur le plan (OAC) en une droite d_4 de vecteur directeur $\overrightarrow{v_4}(-a, -b, -c)$.

$\overrightarrow{v_4} = -\overrightarrow{v_1}$ et donc d_4 est parallèle à d_1. On a montré que si un rayon se réfléchit successivement sur les plans (OAB), (OBC) puis (OAC), le rayon final est parallèle au rayon initial.

2) *Réflexion de d_2 sur le plan (OBC).*

a) La droite d_2 est la droite passant par $I_1(2, 3, 0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{v_2}(-2, -1, 1)$. Une représentation paramétrique de d_2 est

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2 - 2t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.$$

b) Un vecteur normal au plan (OBC) est le vecteur $\overrightarrow{OA}$ de coordonnées $(1, 0, 0)$. Une équation cartésienne du plan (OBC) est $x = 0$.

c) $\left\{\begin{array}{l} x_{I_2} = 0 = 2 - 2 \times 1 \\ y_{I_2} = 2 = 3 - 1 \\ z_{I_2} = 1 \end{array}\right.$. Donc, le point I_2 appartient à la droite d_2. D'autre part, $x_{I_2} = 0$ et donc le point I_2 appartient au plan (OBC). Enfin, le vecteur $\overrightarrow{v_2}$ n'est pas orthogonal au vecteur normal $\overrightarrow{OA}$ car $x_{\overrightarrow{v_2}} \neq 0$ et donc la droite d_2 n'est pas parallèle au plan (OBC). Finalement, la droite d_2 et le plan (OBC) sont sécants en I_2.

3) *Réflexion de d_3 sur le plan (OAC).*

d_3 est la droite passant par $I_2(0, 2, 1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{v_3}(2, -1, 1)$. Une représentation paramétrique de la droite d_3 est $\left\{\begin{array}{l} x = 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}$. Une équation cartésienne du plan (OAC) est $y = 0$.
Soit $M(2t, 2 - t, 1 + t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de d_3. $M \in (OAC) \Leftrightarrow 2 - t = 0 \Leftrightarrow t = 2$. Quand $t = 2$, on obtient le point de coordonnées $(4, 0, 3)$. Les coordonnées du point I_3 sont donc $(4, 0, 3)$.

Finalement, d_4 est la droite passant par $I_3(4, 0, 3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{v_4}(2, 1, 1)$.

4) *Étude du trajet de la lumière.*

a) d_1 est dirigée par $\overrightarrow{v_1}(-2, -1, -1)$ et d_2 est dirigée par $\overrightarrow{v_2}(-2, -1, 1)$. $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathscr{P}$.

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v_1} = 1 \times (-2) + (-2) \times (-1) + 0 \times (-1) = -2 + 2 = 0$$

et

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v_2} = 1 \times (-2) + (-2) \times (-1) + 0 \times 1 = -2 + 2 = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathscr{P}$ et donc le vecteur $\overrightarrow{u}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

b) Les droites d_1 et d_2 définissent un unique plan à savoir le plan $\mathscr{P}$. Si les droites d_1, d_2 et d_3 sont contenues dans un même plan, alors la droite d_3 est contenue dans le plan $\mathscr{P}$.

La droite d_3 est dirigée par $\overrightarrow{v_3}(2, -1, 1)$.

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v_3} = 1 \times 2 + (-2) \times (-1) + 0 \times 1 = 2 + 2 = 4 \neq 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{v_3}$ n'est pas orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et donc la droite d_3 n'est pas parallèle au $\mathscr{P}$. En particulier, la droite d_3 n'est pas contenue dans $\mathscr{P}$ et donc les droites d_1, d_2 et d_3 ne sont pas situées dans un même plan.

c) La droite d_4 est parallèle à la droite d_1 et donc au plan $\mathscr{P}$. Par suite, la droite d_4 est contenue dans le plan $\mathscr{P}$ si et seulement si le point $I_3(4, 0, 3)$ appartient au plan $\mathscr{P}$. Le plan $\mathscr{P}$ est le plan passant par $I_1(2, 3, 0)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{u}(1, -2, 0)$. Une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est $(x - 2) - 2(y - 3) = 0$ ou encore $x - 2y + 4 = 0$.

$$x_{I_4} - 2y_{I_4} + 4 = 4 - 0 + 4 = 8 \neq 0.$$

Le point I_4 n'appartient pas au plan $\mathscr{P}$ et donc les droites d_1, d_2 et d_4 ne sont pas situées dans un même plan.

