Asie 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (5 points) (commun à tous les candidats)

Un maraîcher est spécialisé dans la production de fraises.
Cet exercice envisage dans la partie A la production de fraises, et dans la partie B leur conditionnement.

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A : production de fraises

Le maraîcher produit ses fraises dans deux serres notées A et B ; 55 % des fleurs de fraisier se trouvent dans la serre A, et 45 % dans la serre B.
Dans la serre A, la probabilité pour chaque fleur de donner un fruit est égale à 0,88 ; dans la serre B, elle est égale à 0,84.

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Proposition 1 :

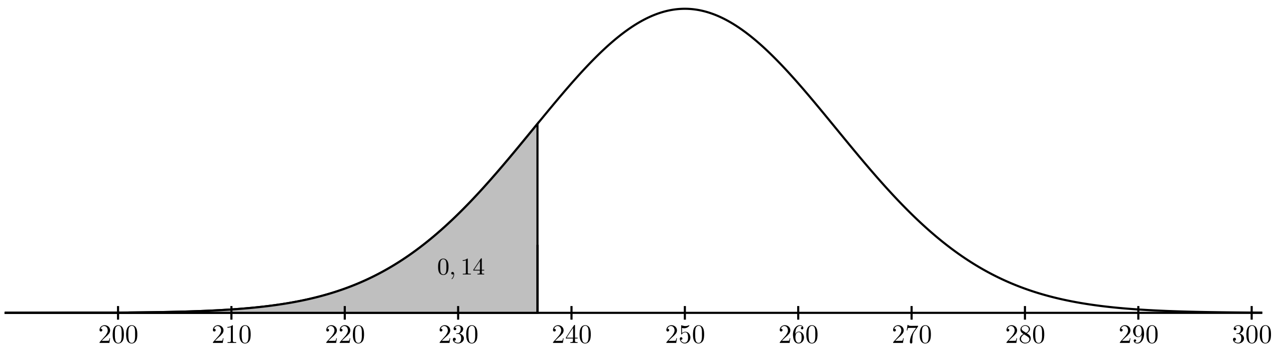
La probabilité qu'une fleur de fraisier, choisie au hasard dans cette exploitation, donne un fruit est égale à 0,862.

Proposition 2 :

On constate qu'une fleur, choisie au hasard dans cette exploitation, donne un fruit.
La probabilité qu'elle soit située dans la serre A, arrondie au millième, est égale à 0,439.

Partie B

Les fraises sont conditionnées en barquettes. La masse (exprimée en gramme) d'une barquette peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 250$ et d'écart-type σ.
La représentation graphique de la fonction densité de la loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée ci-après :



1) On donne $P(X \leqslant 237) = 0,14$. Calculer la probabilité de l'évènement « la masse de la barquette est comprise entre 237 et 263 grammes ».

2) On note Y la variable aléatoire définie par : $Y = \dfrac{X - 250}{\sigma}$.

a) Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?

b) Démontrer que $P\left(Y \leqslant -\dfrac{13}{\sigma}\right) = 0,14$.

c) En déduire la valeur de σ arrondie à l'entier.

3) Dans cette question, on admet que σ vaut 12. On désigne par n et m deux nombres entiers.

a) Une barquette est conforme si sa masse, exprimée en grammes, se trouve dans l'intervalle $[250 - n\ ;\ 250 + n]$. Déterminer la plus petite valeur de n pour qu'une barquette soit conforme, avec une probabilité supérieure ou égale à 95 %.

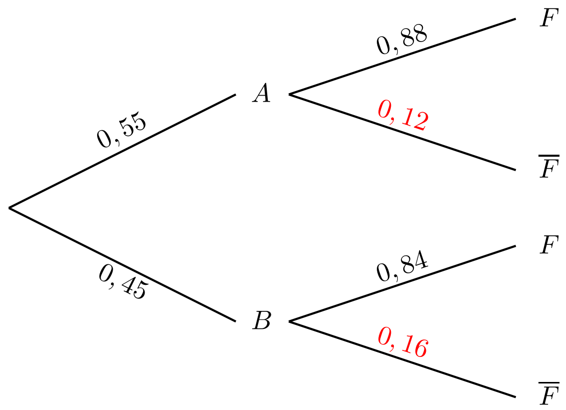
b) On considère dans cette question qu'une barquette est conforme si sa masse, exprimée en grammes, se trouve dans l'intervalle $[230\ ;\ m]$. Déterminer la plus petite valeur de m pour qu'une barquette soit conforme, avec une probabilité supérieure ou égale à 95 %.

Asie 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

Partie A

Notons A l'évènement « la fleur provient de la serre A », B l'évènement « la fleur provient de la serre B » et F l'évènement « la fleur donne un fruit ». Représentons la situation par un arbre de probabilités.



La probabilité demandée est $P(F)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(F) = P(A) \times P_A(F) + P(B) \times P_B(F) = 0,55 \times 0,88 + 0,45 \times 0,84 = 0,484 + 0,378$$
$$= 0,862.$$

La proposition 1 est vraie.

La probabilité demandée est $P_F(A)$.

$$P_F(A) = \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = \frac{0,55 \times 0,88}{0,862} = 0,561 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

La proposition 2 est fausse.

Partie B

1) Puisque $237 = 250 - 13$ et $263 = 250 + 13$, les deux nombres 237 et 263 sont symétriques par rapport au nombre 250. Pour des raisons de symétrie,

$$P(237 \leqslant X \leqslant 263) = 1 - P(X \leqslant 237) - P(X \geqslant 263) = 1 - 2P(X \leqslant 237) = 1 - 2 \times 0,14 = 0,72.$$

2) a) On sait que Y suit la loi normale centrée réduite c'est-à-dire la loi normale de moyenne 0 et d'écart-type 1.

b) $X \leqslant 237 \Leftrightarrow X - 250 \leqslant -13 \Leftrightarrow \frac{X-250}{\sigma} \leqslant -\frac{13}{\sigma} \Leftrightarrow Y \leqslant -\frac{13}{\sigma}$. Les événements $X \leqslant 237$ et $Y \leqslant -\frac{13}{\sigma}$ sont les mêmes et donc

$$P\left(Y \leqslant -\frac{13}{\sigma}\right) = P(X \leqslant 237) = 0,14.$$

c) La calculatrice fournit

$$P\left(Y \leqslant -\frac{13}{\sigma}\right) = 0,14 \Leftrightarrow -\frac{13}{\sigma} = -1,080\ldots \Leftrightarrow \sigma = 12,03\ldots$$

Donc, $\sigma = 12$ arrondi à l'unité.

3) a) La suite $(P(250 - n \leqslant X \leqslant 250 + n))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. La calculatrice fournit

$$P(250 - 23 \leqslant X \leqslant 250 + 23) = 0,944\ldots < 0,95 \text{ et } P(250 - 24 \leqslant X \leqslant 250 + 24) = 0,954\ldots \geqslant 0,95.$$

La plus petite valeur de l'entier n pour laquelle la probabilité qu'une barquette soit conforme, est supérieure ou égale à $0,95$, est $n = 24$.

b) La suite $(P(250 \leqslant X \leqslant m))_{m \geqslant 230}$ est croissante. La calculatrice fournit

$$P(230 \leqslant X \leqslant 284) = 0,949\ldots < 0,95 \text{ et } P(230 \leqslant X \leqslant 285) = 0,950\ldots \geqslant 0,95.$$

La plus petite valeur de l'entier m pour laquelle $P(230 \leqslant X \leqslant m) \geqslant 0,95$ est $m = 285$.

