Antilles Guyane 2016. Enseignement de spécialité

EXERCICE 4 (5 points) (candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

On considère l'équation suivante d'inconnues x et y entiers relatifs :

$$7x - 3y = 1 \qquad (E).$$

1) Un algorithme incomplet est donné ci-dessous. Le recopier et le compléter, en écrivant ses lignes manquantes (1) et (2) de manière à ce qu'il donne les solutions entières $(x\ ;\ y)$ de l'équation (E) vérifiant $-5 \leqslant x \leqslant 10$ et $-5 \leqslant y \leqslant 10$.

```
Variables :   X est un nombre entier
              Y est un nombre entier
Début :       Pour X variant de −5 à 10
                  (1) ...............
                      (2) ...............
                      Alors Afficher X et Y
                      Fin Si
                 Fin Pour
              Fin Pour
Fin
```

2) a) Donner une solution particulière de l'équation (E).

b) Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

c) Déterminer l'ensemble des couples $(x\ ;\ y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) tels que $-5 \leqslant x \leqslant 10$ et $-5 \leqslant y \leqslant 10$.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation

$$7x - 3y - 1 = 0.$$

On définie la suite (A_n) de points du plan de coordonnées $(x_n\ ;\ y_n)$ vérifiant pour tout n entier naturel :

$$\left\{\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ y_0 = 2 \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad \left\{\begin{array}{l} x_{n+1} = -\dfrac{13}{2}x_n + 3y_n \\ y_{n+1} = -\dfrac{35}{2}x_n + 8y_n \end{array}\right. .$$

1) On note M la matrice $\begin{pmatrix} -\dfrac{13}{2} & 3 \\ -\dfrac{35}{2} & 8 \end{pmatrix}$. Pour tout entier naturel n, on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = MX_n$.

b) Sans justifier, exprimer pour tout entier naturel n, X_n en fonction de M^n et X_0.

2) On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$ et on admet que la matrice inverse de P, notée P^{-1}, est définie par $P^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.

b) Pour tout entier naturel n, donner D^n sans justification.

c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $M^n = PD^nP^{-1}$.

3) On admet que, pour tout entier naturel n, $M^n = \begin{pmatrix} -14 + \dfrac{15}{2^n} & 6 - \dfrac{6}{2^n} \\ -35 + \dfrac{35}{2^n} & 15 - \dfrac{14}{2^n} \end{pmatrix}$.

 © Jean-Louis Rouget, 2016. Tous droits réservés.

En déduire que, pour tout entier naturel n, une expression de x_n et y_n en fonction de n.

4) Montrer que, pour tout entier naturel n, le point A_n appartient à la droite $\mathscr{D}$.

 © Jean-Louis Rouget, 2016. Tous droits réservés.

Antilles Guyane 2016. Enseignement de spécialité

EXERCICE 4 : corrigé

Partie A

1) Algorithme complété

Variables :	X est un nombre entier Y est un nombre entier

Début :	Pour X variant de -5 à 10
	    Pour Y variant de -5 à 10
	        Si $7X - 3Y = 1$
	        Alors afficher X et Y
	        Fin Si
	    Fin Pour
	Fin Pour

Fin :	

2) a) $7 \times 1 - 3 \times 2 = 1$ et donc le couple $(x_0, y_0) = (1, 2)$ est un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E).

b) Soit (x, y) un couple d'entiers relatifs.

$$7x - 3y = 1 \Leftrightarrow 7x - 3y = 7x_0 - 3y_0 \Leftrightarrow 7\left(x - x_0\right) = 3\left(y - y_0\right).$$

Donc, si (x, y) est solution de l'équation (E), alors l'entier 3 divise l'entier $7\left(x - x_0\right)$. Puisque 3 et 7 sont premiers entre eux, le théorème de Gauss permet d'affirmer que l'entier 3 divise l'entier $x - x_0$. Donc, il existe un entier relatif k tel que $x - x_0 = 3k$ ou encore tel que $x = x_0 + 3k$. De même, il existe un entier relatif k' tel que $y - y_0 = 7k'$ ou encore tel que $y = y_0 + 7k'$.

Réciproquement, soient k et k' deux entiers relatifs puis $x = x_0 + 3k$ et $y = y_0 + 7k'$.

$$7x - 3y = 1 \Leftrightarrow 7\left(x_0 + 3k\right) - 3\left(y_0 + 7k'\right) = 1 \Leftrightarrow 7x_0 - 3y_0 + 21(k - k') = 1 \Leftrightarrow 21(k - k') = 0 \Leftrightarrow k = k'.$$

Les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) sont les couples de la forme $(1 + 3k, 2 + 7k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

c) Soient k un entier relatif puis $x = 1 + 3k$ et $y = 2 + 7k$.

$$-5 \leqslant x \leqslant 10 \Leftrightarrow -5 \leqslant 1 + 3k \leqslant 10 \Leftrightarrow -2 \leqslant k \leqslant 3$$

et

$$-5 \leqslant y \leqslant 10 \Leftrightarrow -5 \leqslant 2 + 7k \leqslant 10 \Leftrightarrow -1 \leqslant k \leqslant \frac{8}{7} \Leftrightarrow -1 \leqslant k \leqslant 1.$$

Finalement,

$$-5 \leqslant x \leqslant 10 \text{ et } -5 \leqslant y \leqslant 10 \Leftrightarrow -1 \leqslant k \leqslant 1.$$

$k = -1$ fournit le couple $(-2, -5)$, $k = 0$ fournit le couple $(1, 2)$ et $k = 1$ fournit le couple $(4, 9)$.

Il y a exactement trois couples (x, y) d'entiers relatifs solutions de (E) tels que $-5 \leqslant x \leqslant 10$ et $-5 \leqslant y \leqslant 10$ à savoir les couples $(-2, -5)$, $(1, 2)$ et $(4, 9)$.

Partie B

1) a) Soit n un entier naturel.

$$\left\{\begin{array}{l} x_{n+1} = -\dfrac{13}{2}x_n + 3y_n \\ y_{n+1} = -\dfrac{35}{2}x_n + 8y_n \end{array}\right. \Rightarrow \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{13}{2} & 3 \\ -\dfrac{35}{2} & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \Rightarrow X_{n+1} = MX_n.$$

b) On sait alors que pour tout entier naturel n, $X_n = M^n X_0$.

2) a)

 © Jean-Louis Rouget, 2016. Tous droits réservés.

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dfrac{13}{2} & 3 \\ -\dfrac{35}{2} & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-91+105}{2} & 21-24 \\ \dfrac{65-70}{2} & -15+16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -\dfrac{5}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14+15 & -21+21 \\ 5-5 & \dfrac{15-14}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Donc, $P^{-1}MP = D$ où D est la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$.

b) On sait que pour tout entier naturel n, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2^n} \end{pmatrix}$.

c) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $M^n = PD^nP^{-1}$.

- $P \times D^0 \times P^{-1} = P \times I_2 \times P^{-1} = P \times P^{-1} = I_2 = M^0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $M^n = PD^nP^{-1}$. Alors,

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n \times M \\ &= PD^nP^{-1}PDP^{-1} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= PD^nI_2DP^{-1} = PD^nDP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n, $M^n = PD^nP^{-1}$.

3) Soit n un entier naturel.

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = X_n = M^nX_0 = \begin{pmatrix} -14+\dfrac{15}{2^n} & 6-\dfrac{6}{2^n} \\ -35+\dfrac{35}{2^n} & 15-\dfrac{14}{2^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+\dfrac{3}{2^n} \\ -5+\dfrac{7}{2^n} \end{pmatrix}.$$

Pour tout entier naturel n, $x_n = -2 + \dfrac{3}{2^n}$ et $y_n = -5 + \dfrac{7}{2^n}$.

4) Soit n un entier naturel.

$$7x_n - 3y_n = 7\left(-2+\frac{3}{2^n}\right) - 3\left(-5+\frac{7}{2^n}\right) = -14 + \frac{21}{2^n} + 15 - \frac{21}{2^n} = 1.$$

Donc, pour tout entier naturel n, le point A_n appartient à la droite $\mathscr{D}$.

 © Jean-Louis Rouget, 2016. Tous droits réservés.